XVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Noveno Grado

Problema 1

Luis escribe en la pizarra la siguiente secuencia de números

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \ldots$$

y se da cuenta de que a partir del tercer término de la secuencia cada elemento se obtiene sumando el término anterior a él, más dos veces el término anterior a este último. Por ejemplo:

$$3 = 1 + 2 \cdot 1, \quad 5 = 3 + 2 \cdot 1, \quad 11 = 5 + 2 \cdot 3, \quad 21 = 11 + 2 \cdot 5$$

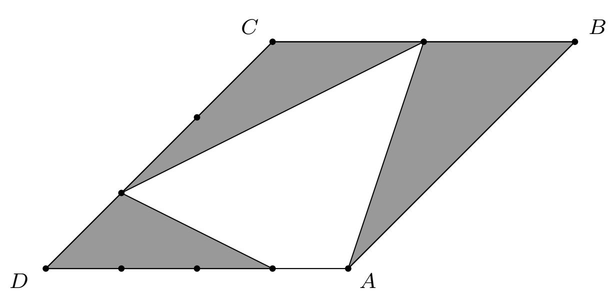
y así sucesivamente. Calcular el resto que deja el elemento que ocupa el lugar 2018 de la sucesión en la división por 7.

Problema 2

En una escuela los casilleros se numeran consecutivamente, empezando por el casillero número 1. Los dígitos de plástico usados para numerar los casilleros cuestan cada uno 2 centavos. Por ejemplo, cuesta dos centavos rotular el casillero 9, cuesta 4 centavos rotular el casillero 10, y cuesta 6 centavos rotular el casillero 100. Si para rotular todos los casilleros se requieren \$139.30 en total, determinar la cantidad de casilleros que hay en la escuela.

Problema 3

Los lados BC, CD y DA del paralelogramo $ABCD$ se dividen respectivamente en dos, tres y cuatro segmentos de igual longitud. Si se sabe que el paralelogramo tiene área 2, calcular el valor del área sombreada.



Problema 4

Carlos tiene un tablero cuadriculado de dimensiones 4×4 y siete fichas negras que desea colocar de tal forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera del tablero, siempre quede alguna ficha sin eliminar. Demostrar que Carlos puede lograr su objetivo. Además, explicar por qué no puede lograrlo si dispone únicamente de seis fichas.

Problema 5

Encontrar todas las ternas de números enteros (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 3 = yz$$

$$y + 2 = zx$$