



## **XX Olimpiada Nacional de Matemática**

Grados participantes: desde 4º hasta 1er año de bachillerato.

Primera Fase: del 26 de enero al 9 de febrero.

Segunda Fase: 29 de febrero.

Contacto: [onm@jovenestalento.edu.sv](mailto:onm@jovenestalento.edu.sv)



MINISTERIO  
DE EDUCACIÓN,  
CIENCIA Y  
TECNOLOGÍA



**EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS  
JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR  
EN LA XX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2020.**

**SOBRE LA PRUEBA:**

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2020. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe que hacen cambio de grado escolar a medio año deben registrarse y realizar la prueba del grado que iniciarán en 2020. Por ejemplo, si actualmente están en quinto grado y a medio año inician sexto, deben realizar el proceso como si estuvieran en sexto grado.

Otras consideraciones:

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.

- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

## **PARTICIPACIÓN:**

El procedimiento de participación en la vigésima Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **26 de enero al 9 de febrero**.
- Registrar sus datos personales en el sitio web <http://www.jovenestalento.edu.sv> a más tardar el **9 de febrero** y guardar el comprobante de inscripción.
- Las pruebas deberán ser entregadas en la Dirección Departamental del Ministerio de Educación correspondiente al departamento de residencia del estudiante. Es importante aclarar que las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila y deben imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre manila y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido.
- El estudiante puede llevar personalmente la prueba o podrá solicitar la colaboración de sus profesores, del Director de la Institución o de los padres de familia para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental, las pruebas se recibirán únicamente en estas oficinas. Consultar en <https://www.mined.gob.sv/paes-cat/item/4306-departamentales.html> las direcciones, teléfonos y horarios de atención de estas oficinas para mayor información.
- La fecha de entrega de las pruebas en las oficinas de la Dirección Departamental del Ministerio de Educación es a más tardar el día **lunes 10 de febrero**, a las 3:00 p.m.

## **REGISTRO**

Para hacer efectivo el ingreso de datos, acceder al sitio web <http://www.jovenestalento.edu.sv>. Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono y dirección de correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y nombre.

## ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado en la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar deberán realizar una prueba presencial el día **sábado 29 de febrero** del presente año. La prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática en el **Edificio del Programa Jóvenes Talento**, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la **Universidad de El Salvador**, según la procedencia de cada estudiante.

Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en <http://www.jovenestalento.edu.sv> desde el día **martes 25 de febrero de 2020** que especificarán el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba presencial. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez, dicha prueba se realizará después de finalizar la prueba presencial.

## INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.

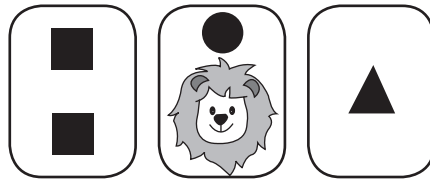
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física, Química e Informática.

La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en <http://www.jovenestalento.edu.sv> o <http://www.mined.gob.sv> el día **martes 17 de marzo de 2020**. La Academia Sabatina se inaugurará el **sábado 21 de marzo de 2020** a partir de las 8:00 a.m. en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador (San Salvador), en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) y Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel), dependiendo de la sede donde haya sido seleccionado el estudiante y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la mañana luego de finalizar la inauguración.

# Cuarto Grado

## Problema 1

Se tienen las siguientes 3 cartas:



Luego, se colocan boca abajo en fila, no necesariamente en ese orden. Se sabe lo siguiente:

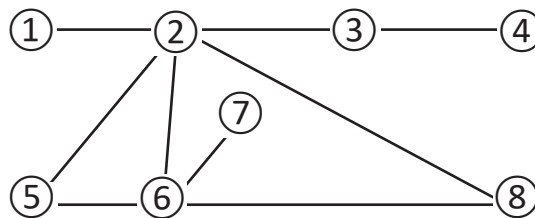
- a. El león y los cuadrados no están uno a la par del otro.
- b. A la izquierda del triángulo, hay un círculo.



Determinar el orden en que se han ubicado las cartas.

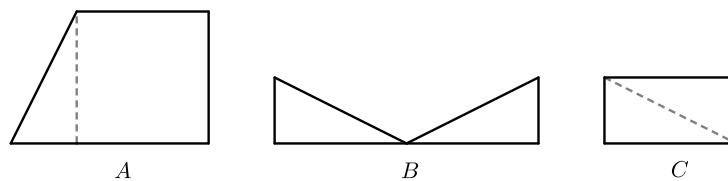
## Problema 2

Alejandra dibuja un esquema con 8 círculos y quiere pintar cada uno de ellos de verde, azul o amarillo. Para divertirse un poco, decide que aquellos círculos que están unidos por una línea no sean pintados del mismo color. Determinar cuáles círculos se puede decir con seguridad que serán pintados del mismo color.



## Problema 3

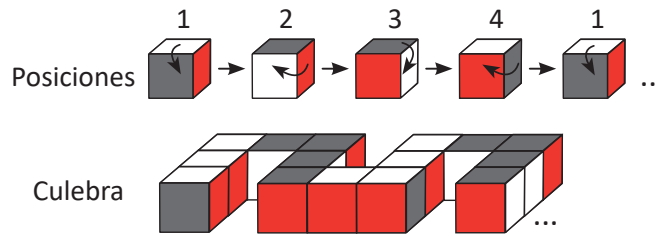
Beatriz dibuja con un molde cinco triángulos iguales y un cuadrado, formando las tres figuras que se muestran a continuación.



Beatriz identifica que la figura *A* tiene 54 *cm* de perímetro, la figura *B* tiene 60 *cm* de perímetro y la figura *C* tiene 34 *cm* de perímetro. Determinar la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

### Problema 4

Mario tiene 50 cubitos cuyas caras opuestas son del mismo color: rojas, blancas o negras. Con todos ellos decide formar una culebra pero cada vez que cambia de dirección, cambia la posición del cubito, como se muestra a continuación:



Determinar la posición del último cubito que coloca Mario en la culebra.

### Problema 5

Fernando coloca 5 números en una cuadrícula para un reto matemático de la escuela. Desafortunadamente olvidó el cuaderno donde apuntó el problema, pero él recuerda los datos que se muestran y la siguiente información:

- a. El producto de los primeros tres números es 540.
- b. El producto de los tres números centrales es 216.
- c. El producto de los últimos tres números es 144.

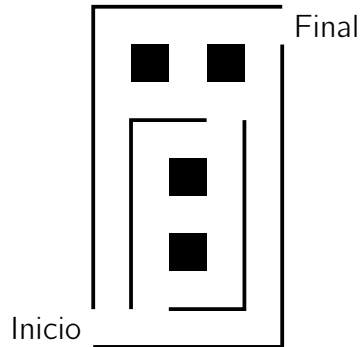
5				8
---	--	--	--	---

Determinar el número que va al centro de la cuadrícula.

# Quinto Grado

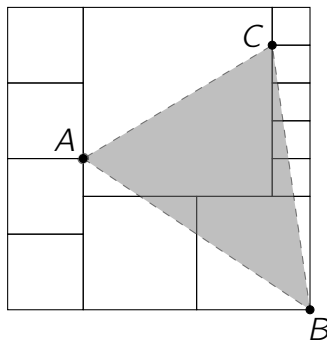
## Problema 1

A continuación se muestra una pista de obstáculos en forma de laberinto. Si solo es permitido avanzar hacia arriba y hacia la derecha, determinar el total de posibles rutas en que se puede ir desde el Inicio hasta el Final.



## Problema 2

Un cuadrado de perímetro  $96 \text{ cm}$  se ha formado apilando doce cuadrados más pequeños como se muestra en la figura. Determinar el área del triángulo sombreado  $ABC$ .



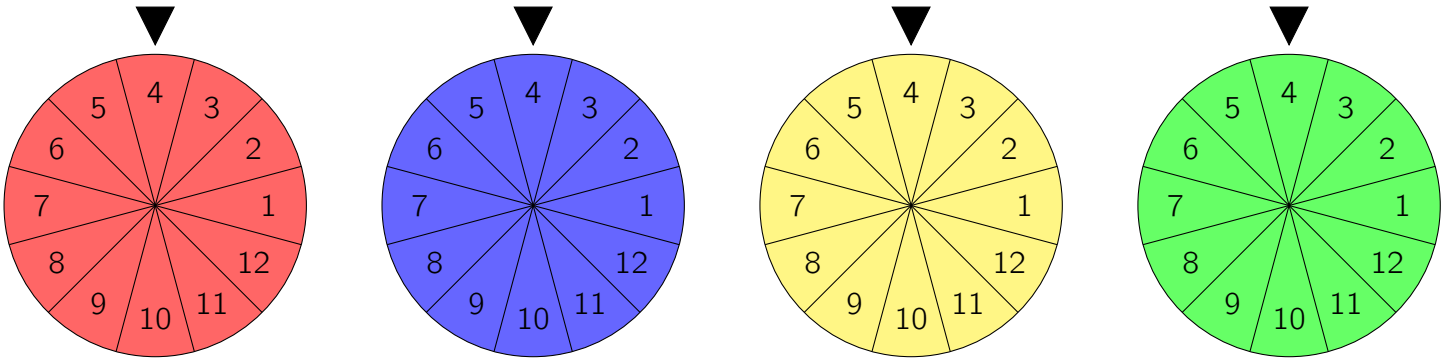
## Problema 3

Una cuadrícula tiene 47 filas y 100 columnas, y se encuentra numerada como se muestra en la figura: se inicia numerando hacia abajo en las primeras dos columnas, luego hacia arriba en las siguientes dos columnas, y así se continúa alternadamente. Encontrar el número de fila y columna donde se encuentra 2020.

1	48	141	188	189	...	...		
2	49	140	187	190	...	...		
3	50	139	186	191	...	...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	94	95	142	235	...	...		

## Problema 4

En un concurso se tienen cuatro ruletas de colores diferentes: rojo, azul, amarillo y verde, cada una dividida en doce secciones numeradas del 1 al 12. Si cuatro concursantes giran a la vez las cuatro ruletas, encontrar el número total de posibilidades en las que el producto de los cuatro números obtenidos en las ruletas sea 24. Por ejemplo, las ruletas de la figura siguiente muestran el resultado rojo 4, azul 4, amarillo 4, verde 4 y su producto es 256.



## Problema 5

En una ciudad hay tres tipos de personas: los honestos que siempre dicen la verdad, los mentirosos que siempre mienten, y los indecisos que también mienten siempre, pero solo hablan si la persona que habló antes de ellos es honesta, por esta razón los indecisos nunca pueden iniciar una conversación. Cierta día se reúnen cinco amigos y en el siguiente orden hacen cinco afirmaciones:

Ana: "Carlos es honesto"

Bernardo: "Ana es mentirosa"

Carlos: "Daniela es honesta"

Daniela: "Bernardo es de mi tipo"

Ernesto: "Bernardo miente"

Determinar de qué tipo son Daniela y Ernesto.



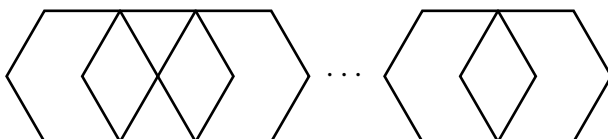
## Sexto Grado

### Problema 1

Hay 2020 casas ubicadas en fila, las cuales serán pintadas de azul o blanco. Los habitantes no quieren que haya tres casas seguidas pintadas del mismo color. Determinar la mayor cantidad de casas que se pueden pintar de azul.

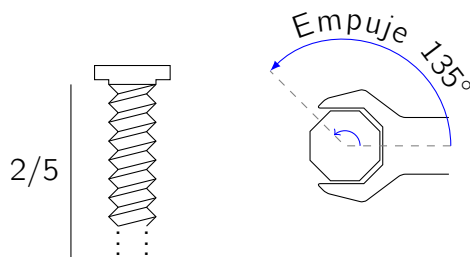
### Problema 2

La siguiente figura se ha construido traslapando 2020 hexágonos regulares de área  $1 \text{ cm}^2$ . Calcular el área de la figura construida.



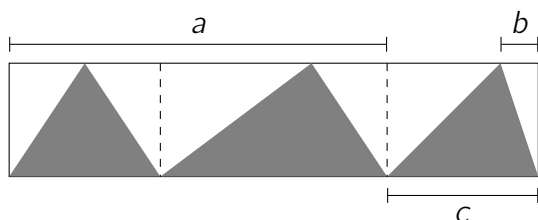
### Problema 3

Carlos ha extraído dos quintas partes de un tornillo que está incrustado en la superficie de una mesa. Cada vez que hace un empuje al tornillo con la llave, lo gira  $135^\circ$  y extrae  $0.75 \text{ mm}$  de altura. Sabiendo que para extraer las dos quintas partes, el tornillo ha dado 45 giros completos, cada uno de  $360^\circ$ , calcular la longitud del tornillo y la cantidad de giros necesarios para sacar la parte restante que está incrustada en la mesa.

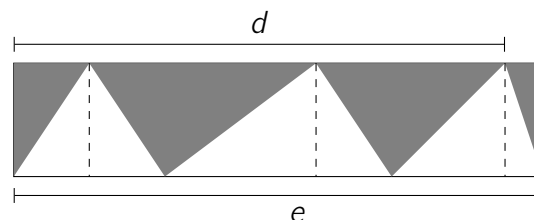


### Problema 4

Se tienen dos piezas rectangulares iguales pero de colores invertidos, como se muestra en la siguiente figura. Si se sabe que el área sombreada en la Pieza 1 es  $48 \text{ cm}^2$  y que la suma de las longitudes  $a + b + c + d + e$  es  $36 \text{ cm}$ , calcular el valor de la altura de cada pieza rectangular.



Pieza 1



Pieza 2

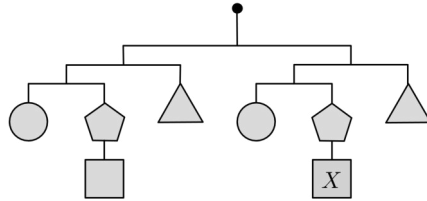
## Problema 5

En el bosque encantado hay una planta mágica que el 31 de diciembre de cada año, a las 11 de la noche pierde todas sus hojas y le brota una flor con 100 pétalos. Desde el 1 de enero, cada día a las 2 de la tarde a la planta le crecen 3 hojas y pierde 2 pétalos, hasta que la flor se queda sin pétalos. A partir de entonces, cada día que pasa, a las 2 de la tarde a la planta le crece solo una hoja adicional. Además, la planta pierde la mitad de sus hojas cada vez que a las 6 de la tarde el número de hojas es igual al de pétalos. Calcular la cantidad de hojas que tendrá la planta el 31 de diciembre del 2020 a las 10 de la noche.

# Séptimo Grado

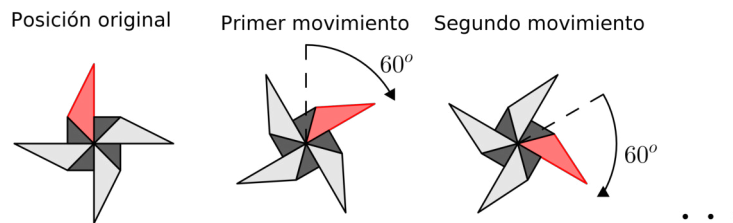
## Problema 1

La balanza de la figura está equilibrada y cada objeto pesa una cantidad entera de gramos mayor que cero. Si la suma de los pesos de todos los objetos es menor a 2020 gramos, determinar el mayor peso que puede tener el objeto marcado con  $X$ .



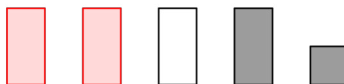
## Problema 2

Andrea construyó un molinito mecánico de cuatro aspas, con una de ellas de color rojo. Luego, lo programó para que haga 2020 movimientos consecutivos, cada uno de los cuales consiste en que sus aspas roten  $60^\circ$  en sentido horario. Determinar el menor ángulo que le hará falta rotar al molinito para que el aspa roja vuelva a su posición original, a partir de la posición en que queda luego de hacer los 2020 movimientos.



## Problema 3

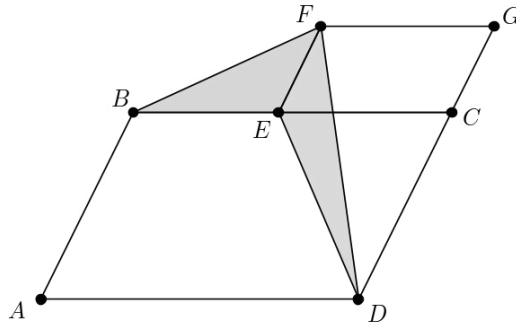
Con las cuatro tablitas rectangulares de  $2\text{ cm}$  por  $4\text{ cm}$  y la tablita cuadrada de lado  $2\text{ cm}$ , que se muestran a continuación, se desea formar un cuadrado de lado  $6\text{ cm}$ . Determinar el número de diseños diferentes que existen para el cuadrado a formar, si las tablitas de igual color no deben hacer contacto, salvo tal vez en un punto en sus esquinas. Aquellos diseños que al rotarlos pueden hacerse coincidir se consideran iguales.



### Problema 4

En la figura siguiente,  $ABCD$  es un paralelogramo de área  $24 \text{ cm}^2$ . También  $CEFG$  es un paralelogramo, tal que  $E$  es un punto sobre el segmento  $\overline{BC}$  y  $G$  es un punto en la prolongación de  $\overline{DC}$ . Si  $\overline{CG}$  mide la mitad que  $\overline{DC}$ :

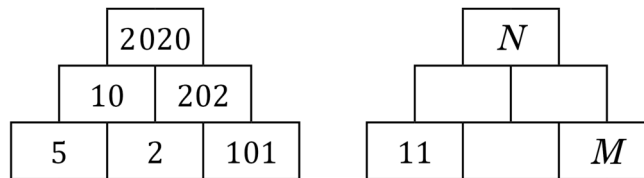
- Calcular el área de la región sombreada cuando  $E$  es el punto medio de  $\overline{BC}$ .
- Demostrar que al calcular el área de la región sombreada, para cualquier posición de  $E$  sobre  $\overline{BC}$ , siempre se obtiene el mismo valor.



### Problema 5

Jorgito llenó las casillas de la pirámide de la izquierda con números naturales de manera que, a partir de la segunda fila, el número en cada casilla es el producto de los números en las dos casillas que están inmediatamente abajo de ella. Luego, Jorgito completará con las mismas condiciones la pirámide de la derecha, pero desea que el número  $N$  sea un número de cinco cifras de la forma  $\overline{abcab}$  y que el número  $M$  sea menor a 20. Determinar todos los valores posibles de  $N$ .

*Observación: El número 2020 es un número de cuatro cifras de la forma  $\overline{abab}$ .*



## Octavo Grado

### Problema 1

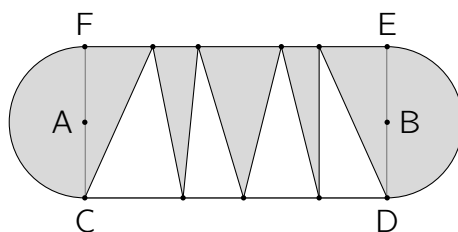
Tres grifos se abren y cierran de forma regular: cada uno de ellos se mantiene abierto por unas horas, y luego queda cerrado la misma cantidad de tiempo. El grifo A se abre por 5 horas, el grifo B por 6, y el grifo C por 8 horas. Los grifos B y C se abren por primera vez al mismo tiempo y el grifo A se abre 2 horas más tarde. Determinar dentro de cuántas horas se abrirán al mismo tiempo los tres grifos luego de abrir por primera vez el grifo A.

### Problema 2

Un libro contiene 30 cuentos, cada uno de los cuales comienza en una nueva página. Las longitudes de los cuentos son  $1, 2, 3, \dots, 30$  páginas, pero no necesariamente en ese orden. El primer cuento comienza en la página 1. Determinar el mayor número de cuentos que pueden comenzar en páginas impares.

### Problema 3

El área sombreada en la figura es igual a  $25 \text{ cm}^2$ . Además, se sabe que el lado  $CD$  del rectángulo  $CDEF$  es el doble del lado  $DE$ , y que los semicírculos laterales  $\widehat{CF}$  y  $\widehat{DE}$  tienen centro en  $A$  y  $B$ , respectivamente. Determinar el perímetro de la figura.



### Problema 4

María y Carmen juegan por turnos con un número de la siguiente forma: si el número es par, lo dividen entre dos, y si es impar, le restan uno. Si María inicia el juego con el número  $2^{2020} + 2020$ , determinar quién de las dos obtendrá el número 1 luego de su turno.

### Problema 5

En la esquina superior derecha de un tablero de  $50 \times 50$  se coloca el número 1. Luego, se selecciona una casilla vacía vecina y se coloca el número 2. Este procedimiento se repite seleccionando siempre una casilla vacía vecina del último número escrito, y se escribe el número siguiente. Determinar si es posible, bajo una secuencia de pasos determinada, colocar el número 2020 en la esquina inferior izquierda.

*Observación: Dos casillas se consideran vecinas si tienen un lado en común.*

# Noveno Grado

## Problema 1

Determinar la cantidad de números de tres cifras que cumplen las dos condiciones siguientes.

- Cada una de sus cifras es un primo.
- El número es divisible por alguna de sus cifras.

## Problema 2

Sea  $\triangle ABC$  un triángulo isósceles con  $AC = BC$  y  $\angle ACB = 40^\circ$ . Se construye la circunferencia con diámetro  $\overline{BC}$  y sean  $D$  y  $E$  los puntos de intersección de dicha circunferencia con los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente. Sea  $F$  la intersección de las diagonales del cuadrilátero  $BCDE$ . Determinar la medida del ángulo  $\angle EFD$ .

## Problema 3

Cinco personas están en una reunión y cada uno es honesto o mentiroso. Inician la conversación de la siguiente manera:

**Alicia:** "Si Bernardo es honesto, entonces yo soy mentirosa."

**Bernardo:** "Si hay más de 2 honestos entre nosotros, entonces uno de ellos es Carmen."

**Carmen:** "Entre Alicia y Denis hay al menos un mentiroso."

**Denis:** "Bernardo y Carmen son ambos mentirosos o ambos honestos."

**Esmeralda:** "Bernardo es honesto o es mentiroso."

Determinar la mayor cantidad de honestos que pueden haber en la reunión.

## Problema 4

Una caja contiene bolitas de los siguientes colores: azul, rojo, verde y blanco. La mitad del total de bolitas que no son rojas, son blancas; un tercio del total de bolitas que no son blancas, son azules y un quinto del total de bolitas que no son verdes, son rojas. Determinar todas las posibles cantidades de bolitas que hay en la caja si se sabe que son menos de 2020.

## Problema 5

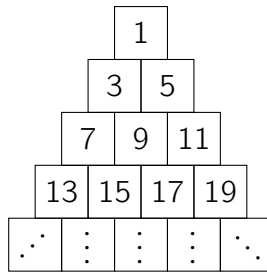
Encontrar todos los pares de números  $(x, y)$  que son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + 1 &= y^2 + xy \\ y + 1 &= x^2 - xy.\end{aligned}$$

# Primer Año de Bachillerato

## Problema 1

Se llena la siguiente pirámide infinita con los números impares de la siguiente forma:



Determinar a partir de qué nivel la suma de todos los números que aparecen en dicho nivel y anteriores niveles es mayor a 2020 (El nivel 3 contiene a 7, 9 y 11).

## Problema 2

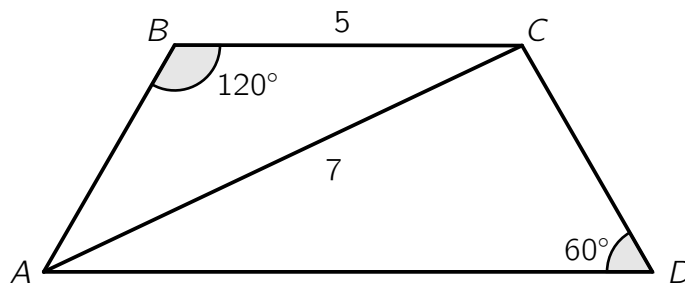
Se consideran los números de la siguiente forma

$$x_n = \overline{abaabaaab \cdots \underbrace{ba \cdots ab}_{n \text{ veces}}}$$

donde  $a$  y  $b$  son dígitos. Determinar para cuántos enteros  $n$  con  $1 \leq n \leq 2020$ ,  $x_n$  es divisible por 11 sin importar los valores de  $a$  y  $b$ .

## Problema 3

En la siguiente figura los segmentos  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$  son paralelos. Calcular la longitud del segmento  $\overline{AD}$ .



## Problema 4

Determinar si existen números reales  $x, y, z$  distintos de 0, tales que, los números  $a, b, c$  definidos por  $a = \frac{y-z}{x}$ ,  $b = \frac{z-x}{y}$ ,  $c = \frac{x-y}{z}$  cumplen la siguiente igualdad:

$$(a + b + c)^2 = 2abc - 1.$$

## Problema 5

Armando y Mauricio juegan al Schwarz. El Schwarz es un juego por turnos que se juega sobre una página de papel marcada con 2020 puntos colocados de manera arbitraria tales que no hay 3 alineados. En cada turno el jugador debe seleccionar dos pares de puntos que no hayan sido unidos previamente y unir cada uno de ellos con un segmento de recta, si se forma un triángulo, al final del turno, se eliminan los puntos que lo conforman y los segmentos de recta conectados a estos puntos y se continúa con el turno del otro jugador. Si en un turno solo es posible unir un par de puntos, estos deben unirse. El perdedor es quien elimina los últimos tres puntos. Si inicia Armando, determinar quién tiene la estrategia ganadora.