PRUEBA DE CUARTO GRADO.

PROBLEMA 1.

Si se reemplazan A, B, C, y D por dígitos distintos de cero, se observa que:

$$\begin{array}{r} ABC\ + \\ DBA = \\ \hline BCCB \end{array}$$

Encuentre A, B, C y D.

PROBLEMA 2.

Como última prueba de un campamento de vacaciones, cuatro niños deben cruzar de noche un puente dañado. El puente solamente soporta el paso de dos niños a la vez, quienes pasan a la velocidad del más lento. Si los cuatro niños sólo tienen una linterna, que deben llevar siempre para cruzar el puente y tardan 1, 2, 4 y 6 minutos en cruzarlo, ¿cuál es el mínimo tiempo necesario para que los cuatro crucen el puente? Justifique la respuesta.

PROBLEMA 3.

En una isla hay sólo tres tipos de habitantes: los **caballeros**, quienes siempre dicen la verdad; los **escuderos**, que siempre mienten; y las personas **normales**, que unas veces mienten y otras veces dicen la verdad. Se encuentran tres personas A, B y C, de las que una es caballero, otra es escudero y la tercera es normal, pero no necesariamente en ese orden, y dicen lo siguiente:

A: *yo soy normal.*

B: *lo que ha dicho A es verdad.*

C: *yo no soy normal.*

¿Qué son, respectivamente A, B y C? Argumente su solución.

PROBLEMA 4.

En un tablero con 20 casillas

Sandra y Humberto se divierten con el siguiente juego:

- Al empezar hay una ficha en la primera casilla.
- Cada jugadora, en su turno, debe mover la ficha; puede avanzar 1, 2 ó 3 casillas.
- Gana quien llega a la última casilla.

Si Sandra comienza el juego, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

PROBLEMA 5.

Escriba un dígito en cada casilla del siguiente cuadrado de 3x3, de manera que se cumpla lo siguiente:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

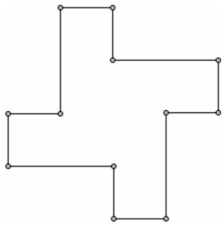
- El número de dos cifras formado por B y C (en ese orden) es igual a la suma de los dígitos escritos en B, E y H.
- El número de tres cifras formado por G, H e I (en ese orden), es igual a la suma de los siguientes números: el formado por A y D (en ese orden), el formado por B y C (en ese orden) y el que forman C, F e I (en ese orden).
- Además, el número formado por B, E y H (en ese orden) es múltiplo de 99.
- El número formado por C, F e I (en ese orden) es un número de tres cifras que es igual al producto del número formado por D y E (en ese orden) multiplicado por si mismo.

PRUEBA DE QUINTO GRADO.

PROBLEMA 1.
Los Rodríguez están organizando una reunión familiar que incluye almuerzo y cena. Uno de los tíos, Aarón, Eder, Gerardo o Riquelmi, organizará el almuerzo, mientras que uno de los sobrinos, Alfonso, Arnoldo, Gabriel o Elizabeth, organizará la cena. Para hacer interesante la elección, la familia decidió que los nombres de ambos organizadores no pueden tener la misma letra inicial. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegirse la pareja de organizadores?

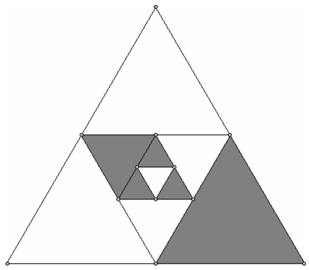
PROBLEMA 2.
Los hermanos de la familia González, del departamento de Morazán, están reunidos para festejar el cumpleaños del abuelo, que es un personaje importante del departamento. En la fiesta hay un reportero de la sección Sociales del diario local. Este se acerca a un miembro de la familia González y le pregunta: ¿cuántos hermanos y hermanas tiene usted? La persona a quien éste se dirigió, responde: tengo tantos hermanos como hermanas. Al formularle la misma pregunta a la hermana de la persona que acaba de hablar, ésta responde: tengo dos veces más hermanos que hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas eran? Justifique su respuesta.

PROBLEMA 3.
En la siguiente figura, las longitudes de los lados largos son todas iguales y la longitud de cualquier lado corto es la mitad de la longitud de cualquier lado largo. Si el área de la figura es 200, ¿cuál es su perímetro?



PROBLEMA 4.

Un triángulo equilátero se dividió en triángulos iguales. Uno de esos triángulos volvió a dividirse en triángulos iguales. Uno de los triángulos pequeños se dividió en triángulos iguales y, finalmente, se sombrearon algunos de los triángulos formados como muestra la siguiente figura. Si el área del triángulo más grande es 96 m^2, ¿cuál es el área de la parte sombreada?



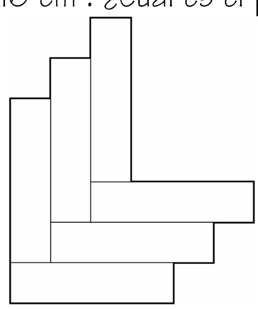
PROBLEMA 5.

Tatiana y Edwin hacen el siguiente juego: de un montón de 2007 fichas cada jugador debe retirar por turno, 1, 2, 3 ó 4 fichas. Pierde quien retira en su turno la última ficha. Si Tatiana comienza el juego, ¿existe alguna estrategia que asegure la victoria de uno de los jugadores? Si su respuesta es sí, describa la estrategia; si su respuesta es no, explique por qué.

PRUEBA DE SEXTO GRADO.

PROBLEMA 1.

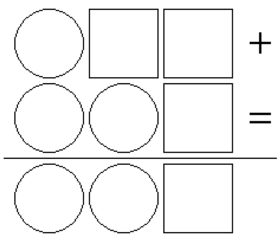
Con seis fichas rectangulares, todas iguales, se armó la figura siguiente. En cada ficha rectangular, la longitud del lado mayor es cuatro veces la longitud del lado menor.
El área de la figura mostrada es 216 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



PROBLEMA 2.
Arnoldo, Gabriel, Alfonso y Otto fueron a comer con sus esposas. En el restaurante se sentaron en una mesa redonda de forma que: ninguna mujer se sentaba al lado de su esposo; enfrente de Gabriel se sentaba Otto; a la derecha de la esposa de Gabriel se sentaba Alfonso y no había dos mujeres juntas. ¿Quién se sentaba entre Gabriel y Arnoldo?

PROBLEMA 3.
Un grupo de profesores elaboran 6 exámenes y deciden que cada examen contenga 7 problemas. En cada examen 4 problemas son originales, mientras que los otros 3 aparecen al menos en otro examen. Determine el máximo número de problemas distintos que pueden contener los 6 exámenes.

PROBLEMA 4.
Con los números del 1 al 9 se realiza la suma que aparece en el tablero, colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos. Escriba todas las formas posibles de ubicar los números.



PROBLEMA 5.
Eder y Aarón juegan con 2007 fichas numeradas del 1 al 2007 y puestas en orden descendente (esto es: 2007, 2006, 2005... 2, 1). El juego consiste en tomar una o dos de las fichas, empezando desde la 2007. Gana un punto quien retire la ficha con el número 82, otro punto quien obtenga más fichas y otro quien tome la ficha con el número 1; gana quien obtenga la mayor cantidad de puntos. Si Eder juega primero, determine quién se puede asegurar la victoria y cómo lo puede hacer.

PRUEBA DE SÉPTIMO GRADO.

PROBLEMA 1.
Un gorila ha comido 300 guineos entre el primero y el seis de febrero (incluyéndolos), comiendo cada día 16 guineos más que el día anterior. ¿Cuántos guineos comió cada día?

PROBLEMA 2.
En una cárcel hay 32 presos repartidos en ocho celdas de planta cuadrada:

1	7	1
7		7
1	7	1

El carcelero cuenta cada noche los presos y comprueba que siempre hayan nueve en cada hilera. Un día se fugan cuatro internos; cuando el carcelero hace la cuenta no se percata, pues los presos siguen sumando nueve por hilera. Tres días más tarde se fugan otros cuatro presos; el carcelero tampoco se entera. Una semana después, el carcelero volvió a contar, y le salieron las cuentas. A la mañana siguiente una inspección descubrió que sólo quedaban 20 presos.
¿Qué estrategia siguieron los presos para fugarse? ¿Podrían fugarse más presos sin que se percate el carcelero?

PROBLEMA 3.
¿Cuántos números de tres cifras hay tales que tengan un número par de dígitos pares?

PROBLEMA 4
Si las longitudes de los lados de un triángulo son todas mayores que 1000 cm, ¿puede su área ser menor que 1 cm^2?

PROBLEMA 5.
En una clase de matemáticas, el profesor escribió un número en la pizarra. Un estudiante dijo “Ese número es múltiplo de 31”. Otro dijo “Ese número es múltiplo de 30”. Un tercero dijo “Ese número es múltiplo de 29”, y así sucesivamente hasta que el estudiante número 30 dijo “Ese número es múltiplo de 2”. El profesor dijo entonces que todas las afirmaciones eran correctas menos 2, y que esas dos habían sido dichas una después de la otra. ¿Cuáles fueron las afirmaciones incorrectas?

PRUEBA DE OCTAVO GRADO.

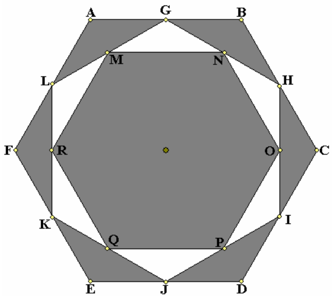
PROBLEMA 1.
Al escribir un dígito en cada casilla de una cuadricula de 2x2, se pueden leer los 2 dígitos en conjunto de una misma fila (de izquierda a derecha), ó los 2 dígitos en conjunto de una misma columna (de arriba hacia abajo) para entenderlos como 4 números de 2 dígitos cada uno. Asuma que los 2 números formados por las 2 filas y el número formado por la primera columna son todos divisibles por un entero positivo K. ¿Será siempre el caso que el número formado por la segunda columna es divisible por K?

PROBLEMA 2.
Los números 36 y 25 son escritos en la pizarra. Tomás y Beatriz juegan con turnos alternados de la siguiente manera: en cada turno, uno de ellos escribe la diferencia positiva de dos números que ya están escritos en la pizarra, siempre y cuando el número

no haya sido escrito previamente. Si el perdedor es aquel que ya no puede escribir más números en la pizarra y Tomás empieza, ¿Quién ganará siempre? ¿y por qué?

PROBLEMA 3.
Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Algunos ejemplos de números capicúas son: 1, 44, 292, 3773. Si la suma de dos números capicúas de cuatro dígitos es un número capicúa de cinco dígitos. ¿Cuál es el máximo valor de esta suma?

PROBLEMA 4.
ABCDEF es un hexágono regular. G, H, I, J, K, L son los puntos medios de los lados de este hexágono. M, N, O, P, Q, R son los puntos medios de los lados del hexágono GHIJKL. Si todos los lados del hexágono ABCDEF miden 1 cm, ¿Cuál es el área sombreada?



PROBLEMA 5.
Al realizar la siguiente suma:

$$9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 99\ldots99 \text{ (999 dígitos nueve).}$$

Es decir, la suma de todos los números naturales que sólo contienen dígitos 9, desde 9 hasta el número que tiene 999 dígitos nueve. ¿Cuántos dígitos unos contiene la representación decimal de esta suma?

PRUEBA DE NOVENO GRADO.

PROBLEMA 1.
Se tiene una bandeja rectangular de cubitos de hielo de 3x6, que se encuentra equilibrada apoyada en el punto de intersección de las diagonales. Se quieren extraer de ella 8 cubitos de tal forma que la bandeja no se desequilibre, ¿de cuántas maneras es posible hacer eso?

PROBLEMA 2.
Se colocan 3 cartas boca abajo sobre una mesa, cada una de las cuales tiene un número entero escrito en ella. Se comunica a Carlos, Angélica e Isabel lo siguiente:

- Todos los números escritos en las cartas son diferentes.
- La suma de estos tres números es 13.
- Están en orden creciente de izquierda a derecha.

Primero Carlos mira el número escrito en la carta del extremo izquierdo y dice “No tengo información suficiente para determinar los otros dos números”. Luego Isabel mira el número escrito en la carta del extremo derecho y dice “No tengo información suficiente para determinar los otros dos números”. Finalmente Angélica mira el número de la carta de enmedio y dice “No tengo información suficiente para determinar los otros dos números”. Suponiendo que cada uno de ellos sabe que los otros dos razonan perfectamente y escucha sus comentarios sin haber visto sus respectivas cartas ¿cuál es el número de la carta de enmedio?

PROBLEMA 3.
Sea *ABCD* un rectángulo, *P* un punto sobre el lado *BC* tal que el área del triángulo *PCD* es tres veces el área del triángulo *ABP*; el lado *AB* mide $2007\sqrt{3}$ y el ángulo *APD* mide 90 grados. Determine la longitud del lado *BC*.

PROBLEMA 4.
El par ordenado (83,89) es llamado **par centenario** porque 83+8+9=100=8+3+89; esto es, la suma de cada número con la suma de los dígitos del otro número, es 100. ¿Cuántos pares centenarios hay?

PROBLEMA 5.
Si k es un entero impar, pruebe que $1+2+...+n$ divide a $1^k+2^k+...+n^k$.

PRUEBA DE PRIMER AÑO DE BACHILLERATO

PROBLEMA 1.
Sea *ABC* un triángulo rectángulo en *B*, el lado *BC* mide 72 cm y el lado *AC* mide 78 cm. Se considera *D* en el lado *AB* tal que *2AD=BD*. Si *O* es el centro de la circunferencia que es tangente al lado *BC* y pasa por *A* y *D*. Determine la medida de *OB*.

PROBLEMA 2.
La secuencia creciente 3, 15, 24, 48, ... consiste de todos los múltiplos positivos de 3 que son uno menos que un número cuadrado perfecto. Determine el residuo de la división por 1000 del término que ocupa la posición 2007 de la secuencia.

PROBLEMA 3.
Dado que $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$, calcule $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ en términos de k.

PROBLEMA 4.
Dos de los cuadrados de un tablero de 7x7 son pintados de blanco, y el resto es pintado de azul. Diremos que dos coloraciones son iguales si una puede obtenerse a partir de

otra aplicándole una rotación al tablero. Determine el número de coloraciones distintas que existen.

PROBLEMA 5.

En cada casilla de un tablero gigante hay escrito un número natural, de acuerdo con las siguientes reglas: los números de la primera columna forman una progresión aritmética de primer término 6 y diferencia 3, es decir, 6, 9, 12, 15, ... Los números de la primera fila forman una progresión aritmética de diferencia 3, los números de la segunda fila forman una progresión aritmética de diferencia 5, y en general, los números de la fila número k forman una progresión aritmética de diferencia $2k+1$. Determine todas las casillas que tienen escrito el número 2007.