

Martes 25 de julio de 2023

1. Una *coloración* del conjunto de los enteros mayores o iguales que 1, debe hacerse con la siguiente regla: cada número se colorea de azul o rojo, de manera que la suma de cualesquiera dos números (no necesariamente distintos) del mismo color, sea azul. Determinar todas las *coloraciones* posibles del conjunto de los enteros mayores o iguales a 1, que sigan esta regla.
2. Octavio escribe un entero $n \geq 1$ en una pizarra y luego inicia un proceso en el que en cada paso borra el número entero k escrito en la pizarra y lo reemplaza por uno de los siguientes números, siempre que el resultado sea entero:

$$3k - 1, \quad 2k + 1, \quad \frac{k}{2}.$$

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$, Octavio puede llegar a escribir en la pizarra el número 3^{2023} luego de una cantidad finita de pasos.

3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demostrar que

$$\frac{a^3}{a^2 + 3b^2 + 3ab + 2bc} + \frac{b^3}{b^2 + 3c^2 + 3bc + 2ca} + \frac{c^3}{c^2 + 3a^2 + 3ca + 2ab} > \frac{1}{6(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$