

Miércoles 26 de julio de 2023

4. Un número de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$, donde a, b, c y d son dígitos, con $a \neq 0$, se denomina *guanaco* si el producto $\overline{ab} \times \overline{cd}$ es un divisor positivo de n . Encontrar todos los números *guanacos* que existen.
5. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y Γ la circunferencia que pasa por A, B y C . Sean D el punto diametralmente opuesto a A en Γ y ℓ la recta tangente en D a Γ . Sean P, Q y R las intersecciones de BC con ℓ , de AP con Γ tal que $Q \neq A$ y de QD con la altura del triángulo ABC por A , respectivamente. Se definen el punto S como la intersección de AB con la recta ℓ y el punto T como la intersección de AC con la recta ℓ . Probar que S y T pertenecen a la circunferencia que pasa por A, Q y R .
6. En un estanque se encuentran $n \geq 3$ piedras dispuestas en una circunferencia.

Una princesa quiere etiquetar las piedras con los números $1, 2, \dots, n$ en algún orden y después colocar algunos sapos sobre las piedras. Una vez que todos los sapos estén ubicados, empiezan a saltar en el sentido de las manecillas del reloj, de acuerdo a la siguiente regla: cuando un sapo llega a la piedra etiquetada con el número k , espera k minutos y luego salta a la piedra adyacente.

Si en ningún momento dos sapos pueden ocupar la misma piedra, ¿cuál es la mayor cantidad de sapos para los cuales la princesa puede etiquetar las piedras, antes de colocar los sapos? Para este máximo, mostrar cómo la princesa puede etiquetar las piedras y cómo colocar los sapos.

Nota: Una piedra se considera ocupada por dos sapos al mismo tiempo solo si existen dos sapos que estén simultáneamente en esta piedra por al menos un minuto.