NM

OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

EL SALVADOR - 2019

XIX Olimpiada Nacional de Matemática

Grados participantes: desde 4º hasta 1er año de bachillerato.

Primera Fase: del 10 al 17 de febrero.

Segunda Fase: 9 de marzo.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

XIX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2019

**EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A
LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A
PARTICIPAR EN LA XIX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA.**

SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2019. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe que hacen cambio de grado escolar a medio año deben registrarse y realizar la prueba del grado que iniciarán en 2019. Por ejemplo, si actualmente están en quinto grado y a medio año inician sexto, deben realizar el proceso como si estuvieran en sexto grado.

Otras consideraciones:

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.

- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la décimo octava Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **10 al 17 febrero**.
- Registrar sus datos personales en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv` a más tardar el **17 febrero** y guardar el comprobante de inscripción.
- Las pruebas deberán ser entregadas en la Dirección Departamental del Ministerio de Educación correspondiente al departamento de residencia del estudiante. Es importante aclarar que las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila y deben imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre manila y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido.
- El estudiante puede llevar personalmente la prueba o podrá solicitar la colaboración de sus profesores, del Director de la Institución o de los padres de familia para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental, las pruebas se recibirán únicamente en estas oficinas, puede consultar en `http://www.mined.gov.sv` las direcciones, teléfonos y horarios de atención de estas oficinas para mayor información.
- La fecha de entrega de las pruebas en las oficinas de la Dirección Departamental del Ministerio de Educación es a más tardar el día **lunes 18 de febrero**, a las 3:00 p.m. para las zonas occidental, central, metropolitana y paracentral. Para la zona oriental (Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión) la entrega será a más tardar el día **miércoles 20 de febrero** a las 3:00 p.m.

REGISTRO

Para hacer efectivo el ingreso de datos, acceder al sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv`. Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono y dirección de correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y nombre.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

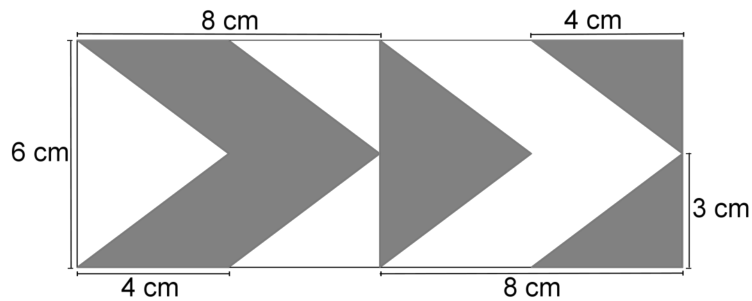
Las mejores participaciones de cada grado en la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar deberán realizar una prueba presencial el día **sábado 9 de marzo** del presente año. La prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática en el **Edificio del Programa Jóvenes Talento**, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la **Universidad de El Salvador**, según la procedencia de cada estudiante.
Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en `http://www.jovenestalento.edu.sv` o `http://www.mined.gob.sv` desde el día **martes 5 de marzo de 2019** que especificarán el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba presencial. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez, dicha prueba se realizará después de finalizar la prueba presencial.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física, Química e Informática.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` o `http://www.mined.gob.sv` el día **martes 19 de marzo de 2019**. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **23 de marzo de 2019** a partir de las 8:00 a.m. en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador (San Salvador), en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) y Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel), dependiendo de la sede donde haya sido seleccionado el estudiante y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la mañana luego de finalizar la inauguración.

Problema 1

En la siguiente figura se muestran dos baldosas de diseños idénticos pero de colores invertidos.



Determinar el área de la región sombreada.

Problema 2

Un pirata encontró entre sus tesoros un cuadro mágico, cada uno de sus lados de 6 centímetros. El cuadro cambia de tamaño si el que lo posee dice una verdad o una mentira. Cuando el pirata dice una verdad, cada lado aumenta el doble; pero cuando dice una mentira, cada lado se reduce un centímetro. Sabemos que el pirata hace 3 comentarios, dos de ellos verdaderos y el otro falso; pero no sabemos en qué orden lo hizo. Determinar el máximo perímetro que puede alcanzar el cuadro.

Problema 3

Wendy, Yanira y Zoila, obtuvieron 8 o 9 en un examen; pero mintieron al hablar sobre sus notas. Wendy dice: "La nota de mi examen es la misma que la de Yanira". Yanira responde: "Mi nota es la misma que la de Zoila". Y finalmente, Zoila dice: "Y exactamente dos de nosotras obtuvimos 9". Determinar la nota que obtuvo cada una.

Problema 4

Miguel, Brenda y Walter juegan usando fichas. Al inicio, Miguel tiene la misma cantidad de fichas que tiene Walter; y al finalizar el juego, Miguel no ha ganado ni ha perdido fichas; pero Walter le ha ganado a Brenda el doble de fichas que él tenía al principio. Cuando Walter cuenta sus fichas, descubre que tiene 21 en total. Determinar la cantidad de fichas que Miguel y Walter tienen entre ambos.

Problema 5

Mariana dibuja una secuencia de figuras como la que se muestra a continuación:

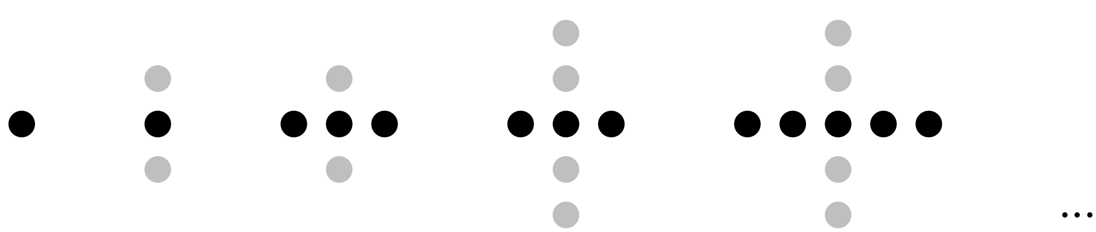


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4 fig. 5

Determinar el número de bolitas negras que debe dibujar en la figura 1000.

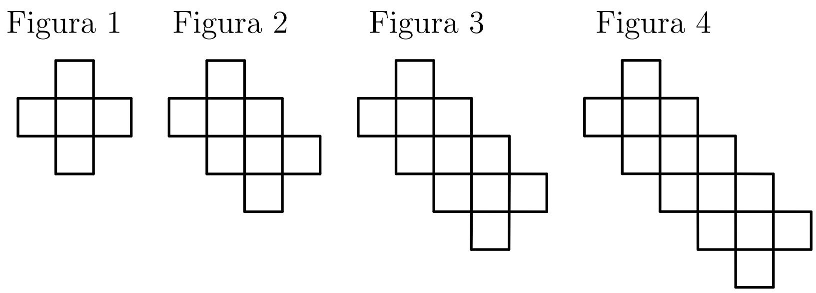
Quinto Grado

Problema 1

Arnoldo, Beatriz, Claudia, David y Elena viven en el mismo pasaje. Se sabe que Arnoldo vive antes que Beatriz, Claudia vive antes que David y que David vive antes que Elena y Arnoldo. Si Beatriz no vive en la última casa del pasaje, determinar el orden de las casas en las que vive cada uno.

Problema 2

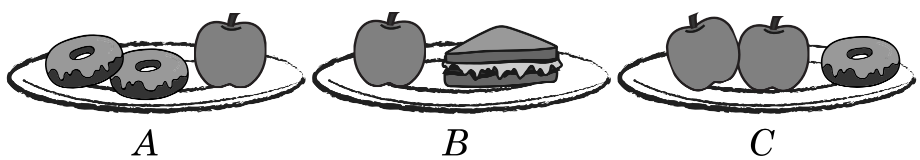
Marta tiene muchas piezas cuadradas (□) y va formando figuras con ellas, como se muestra a continuación.



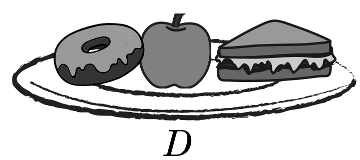
Determinar el número de piezas cuadradas que necesitará Marta para formar la figura 2019.

Problema 3

A Julia le gusta comer donas, sándwiches y manzanas. En su comedor favorito, ha identificado que las siguientes combinaciones están ordenadas de menor a mayor precio.

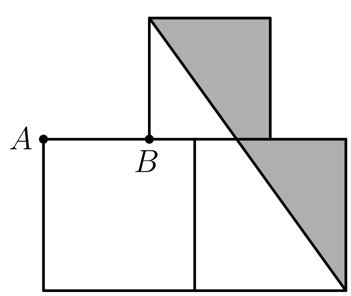


Julia arma el plato D, mostrado a la derecha. Determinar dónde debe ubicar Julia este plato entre los platos A, B y C para que sigan estando en orden de menor a mayor precio.



Problema 4

Se construyen dos cuadrados de lado 10 y sobre ellos se construye otro cuadrado de lado 8. Si la distancia entre A y B es 7, determinar el valor del área sombreada.



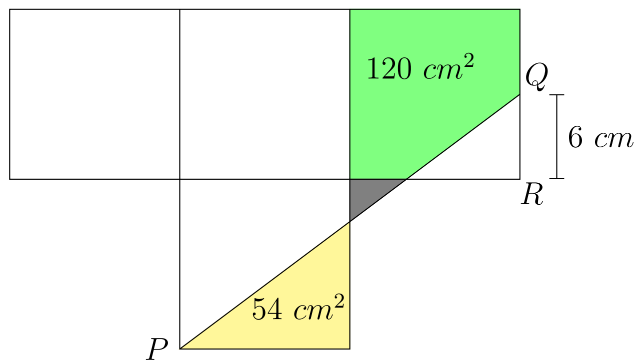
Problema 5

Cecilia juega escribiendo los números del 1 al 2019 en su cuaderno y luego los encierra de la siguiente manera: comenzando por el 1, encierra con un círculo un número sí y uno no, hasta terminar con la lista; luego, hace lo mismo pero comenzando por el 2019 y encerrando con un cuadrado un número sí y dos no. Determinar cuántos números de la lista no han quedado encerrados ni por un círculo ni por un cuadrado.

Sexto Grado

Problema 1

La siguiente figura está compuesta por cuatro cuadrados de lado 12 cm, se sabe además que $QR = 6\ cm$, el área del pentágono verde es $120\ cm^2$ y la del triángulo amarillo es $54\ cm^2$, usando esta información, determinar el área del triángulo sombreado en gris.



Problema 2

Cincuenta almohadas en forma de cubo se apilan una encima de la otra. Cada almohada pesa 500 g e inicialmente tiene un grosor de 100 cm. Sin embargo, el grosor de cada almohada se reduce en 4 cm por cada 1000 g colocados sobre esta. Determinar la altura de la pila de almohadas.

Problema 3

Blanca escribe los números enteros positivos en una cuadrícula con 11 columnas. Como a Blanca no le gustan los múltiplos de 7 no escribe ninguno de ellos. Determinar el número de fila y de columna en el que aparecerá 2019 en la cuadrícula de Blanca.

1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12
13	15	16	17	18	19	20	22	23	24	25
26	27	29	30	31	32	33	34	36	37	38

Problema 4

En una isla viven animales que se clasifican en tres categorías: los Héroes que siempre dicen la verdad, los Villanos que siempre mienten y los Cobardes que luego de decir algo verdadero siempre dicen una mentira y viceversa. Cierto día en la isla se encuentran un león, una gacela y un ratón que hacen las siguientes afirmaciones:

(a) El ratón dice “Soy cobarde” y luego dice “El león es un héroe”.

(b) El león dice “Soy un héroe” y luego dice “La gacela es cobarde”.

(c) La gacela dice “Soy villana” y luego dice “El ratón es cobarde”.

Determinar cuántos de estos tres animales son cobardes.

Problema 5

Ernesto considera todos los números naturales del 10 al 10000 y para cada uno de ellos toma su primer dígito y el último, luego los resta y escribe el resultado. Por ejemplo para 235 obtuvo como resultado -3 y para 83 obtuvo 5. Determinar la suma total de los resultados que obtuvo Ernesto.

Séptimo Grado

Problema 1

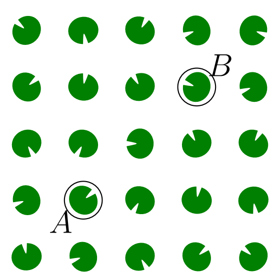
Compré una nueva planta para mi jardín. Ana dijo que era una rosa roja, Berta dijo que era un tulipán púrpura, y Carmen dijo que era una dalia roja. Cada una de ellas tenía razón al indicar el color o bien el tipo de la planta, pero no ambas características al mismo tiempo. Determinar el tipo y color de la planta que compré.

Problema 2

Una cesta contiene más de 2019 manzanas. Tres amigos se dan cuenta de que pueden repartirla entre ellos de manera exacta. Llega un cuarto amigo y deciden rehacer la repartición, siempre en partes iguales y logran hacerlo nuevamente de manera exacta. Uno de los cuatro va a casa y en el camino se come dos manzanas. Cuando llega a casa, se da cuenta de que puede compartir las manzanas restantes con su hermana sin cortarlas. Determinar la menor cantidad posible de manzanas que tiene la cesta inicialmente.

Problema 3

En un estanque, las hojas de nenúfar están dispuestas en una cuadrícula como lo indica la siguiente figura.



Los sapos las utilizan para moverse con saltos desde una hoja a una adyacente horizontal o verticalmente. Un sapo está en la hoja A y debe llegar a la hoja B para capturar un insecto, para ello, hace un camino de 6 saltos sin pasar dos veces sobre la misma hoja. Determinar la cantidad de caminos diferentes que puede hacer el sapo.

Problema 4

Alfredo y Benito comienzan un juego con un pila de 2019 piedras. Alternan turnos, iniciando con Alfredo. En cada turno debe retirarse 4, 5 o 6 piedras de la pila, y si hay menos de 4 piedras se retiran todas a la vez. El jugador que quita las últimas piedras gana el juego. Determinar si Benito tiene una estrategia ganadora.

Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si hay una serie de movimientos que garantizan su triunfo, independientemente de lo que haga el otro jugador.

Problema 5

Se construye una pirámide de base triangular $\triangle ABC$ y el otro vértice en el punto D. Sea P un punto sobre la arista AD tal que los segmentos BP y CP forman un ángulo recto entre sí. Se sabe que P divide a AD en segmentos de longitud 1 cm y 2 cm, y que los segmentos BP y CP miden respectivamente 3 cm y 4 cm. Determinar el volumen (en cm^3) de la pirámide.

Problema 1

Tania escribe los números del 1 al 100 en una pizarra y a continuación subraya todos aquellos cuya cantidad de divisores es un número primo impar. Determinar la cantidad de números subrayados por Tania.

Problema 2

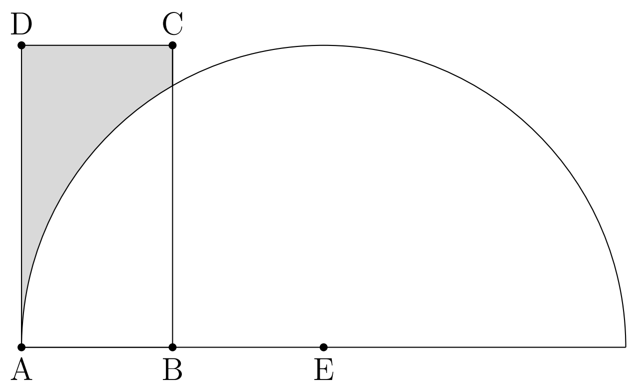
David es un tartamudiano. Los tartamudianos siempre dicen dos verdades seguidas o dos mentiras seguidas. Se cree que David ha cometido un terrible crimen y están a punto de interrogarlo. Usando el menor número de preguntas, determinar si David es culpable o no.

Problema 3

2019 monedas, cada una con un valor de 1, 2 o 3, son colocadas en una fila. Entre cualesquiera dos monedas de valor 1, hay por lo menos una moneda; entre cualesquiera dos monedas de valor 2 hay por lo menos dos monedas; y entre cualesquiera dos monedas de valor 3, hay por lo menos tres monedas. Determinar el mayor número de monedas de valor 3 que puede haber en la fila.

Problema 4

En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AB = 1$ y $BC = 2$. Se sabe además que el semicírculo con centro en E tiene radio igual a 2 y es tangente al lado AD. Determinar el valor del área sombreada.



Problema 5

Un grupo de sastres deben confeccionar 558 vestidos. Dos tercios de los vestidos son largos, y el resto son vestidos cortos. Durante la primera mitad del día uno, todos los sastres se dedican a confeccionar vestidos largos. En la segunda mitad del mismo día, la mitad de los sastres confeccionan vestidos largos y la otra mitad vestidos cortos. Justo al terminar el primer día, todos los vestidos largos quedan terminados, pero no los cortos. En el siguiente día, un solo sastre confecciona el resto de los vestidos, usando todo el día para hacerlo. Determinar cuántos sastres había en el grupo, si cada uno es igual de eficiente que los demás y se tarda lo mismo en confeccionar un vestido largo y uno corto.

Noveno Grado

Problema 1

Se escriben cinco enteros positivos en una pizarra (no necesariamente distintos) y se calculan las sumas de todas las posibles parejas escogidas entre dichos números. Los resultados obtenidos son únicamente 13, 22 y 31. Determinar los números escritos en la pizarra.

Problema 2

Arnoldo es un nuevo instructor del Programa Jóvenes Talento. Antes de la primera reunión conoce a Gabriel y Mario, quienes le preguntan en qué área y en qué nivel dará clases. Arnoldo les da las siguientes diez posibilidades:

Física nivel 2, Física nivel 3, Física nivel 6,
Biología nivel 4, Biología nivel 5,
Química nivel 1, Química nivel 3,
Matemática nivel 1, Matemática nivel 2 y Matemática nivel 4.

Además, Arnoldo le dice a Gabriel su área y a Mario su nivel, con lo cual sucede la siguiente conversación:
Gabriel: "No sé a quienes le dará clases Arnoldo, pero sé que Mario tampoco lo sabe".
Mario: "Al principio yo no sabía, pero con lo que me has dicho ya lo sé".
Gabriel: "Entonces yo también sé a quienes le dará clases".
Determinar el área y nivel de Arnoldo.

Problema 3

Se considera un trapecio $ABCD$ de área 2019 cm^2, donde los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 70 cm y 30 cm respectivamente. Se marca un punto E sobre $\overline{CD}$ de manera que el área del triángulo AED sea la tercera parte del área de el trapecio $ABCE$. Determinar el área del triángulo ACE.

Problema 4

Determinar el número de formas en que 2019 puede escribirse como suma de varios enteros positivos consecutivos. (El orden de los sumandos es irrelevante.)

Problema 5

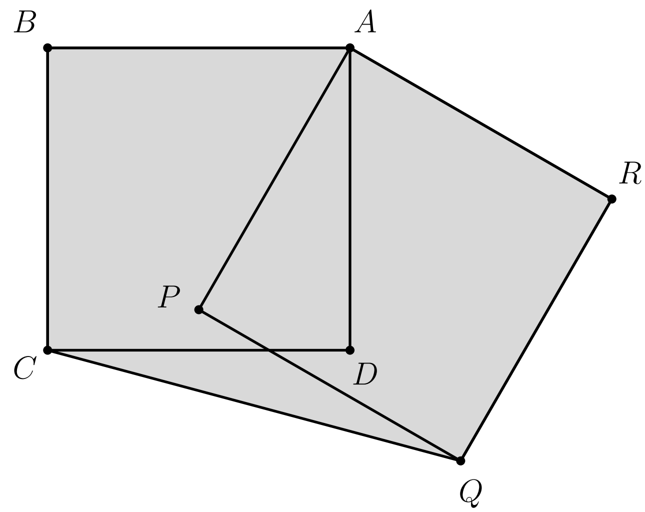
Ana y Andrea juegan por turnos con un montón de N piedras, donde N es un número entero par mayor que 2. Empieza jugando Ana. Un turno consiste en que si el montón tiene k piedras, entonces se escoge un entero positivo m primo relativo con k y se retiran m piedras del montón. El jugador que al retirar cierta cantidad de piedras deja el montón con una única piedra pierde el juego. Determinar cuál jugadora puede garantizarse siempre la victoria.

Problema 1

En una cuadrícula infinita en todas direcciones, cada casilla esta coloreada de blanco o negro. Cada segundo el color de las casillas cambia como sigue: si una casilla blanca y una negra son adyacentes, en el siguiente segundo ambas cambian de color. Se sabe que al principio hay una sola casilla blanca en toda la cuadrícula. Determinar el número de casillas blancas después de 2019 segundos.

Problema 2

En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 1. Efectuando una rotación de $60°$ con centro en A se obtiene un segundo cuadrado $APQR$. Determinar el área del pentágono $ABCQR$.



Problema 3

Determinar todas las ternas (a, b, c) de enteros no nulos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$a^3 + a^2 + b^2 = 0$$
$$b^3 + b^2 + c^2 = 0$$
$$c^3 + c^2 + a^2 = 0$$

Problema 4

En un país remoto se usa el lenguaje *oenemense*, que está sujeto a las siguientes reglas:

(i) El alfabeto consta únicamente de las letras O, N, M.

(ii) Toda sílaba consta de las tres letras O, N, M en algún orden.

(iii) Toda palabra consta de una o varias sílabas, de modo que no haya vocales consecutivas. Por ejemplo, $ONMNOM$ es una palabra válida, pero $NMOONM$ no.

Demostrar que para todo $n \geq 2$ el número de palabras de n sílabas es múltiplo de 4.

Problema 5

Un *dado* es un cubo de lado 1 con los números del 1 al 6 en cada una de sus caras, de modo que cada número aparece sólo una vez, y la suma de los números en caras opuestas es 7. Se arma un cubo de 3×3 usando 27 dados, y a continuación se calcula la suma de todos los números que aparecen sobre las caras del mismo. Determinar los posibles valores de esta suma.