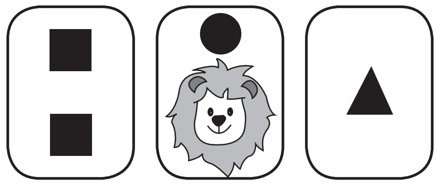
XX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA
Cuarto grado

Problema 1

Se tienen las siguientes 3 cartas:



Luego, se colocan boca abajo en fila, no necesariamente en ese orden. Se sabe lo siguiente:

a. El león y los cuadrados no están uno a la par del otro.

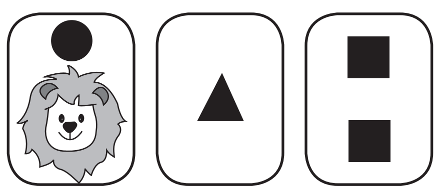
b. A la izquierda del triángulo, hay un círculo.

Determinar el orden en que se han ubicado las cartas.

Solución.

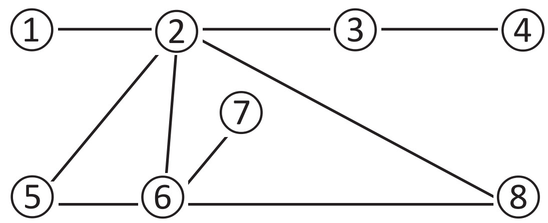
La primera condición que nos dan nos obliga a colocar separadas la carta que tiene el león y la que tiene los cuadrados; es decir, ambas van en los extremos y por tanto, la carta del triángulo va al medio.

Por otra parte, de la segunda condición se puede concluir que la carta que tiene al león y el círculo van de primero. Así, el orden de las cartas es: la del león y el círculo, la del triángulo, la de los cuadrados.



Problema 2

Alejandra dibuja un esquema con 8 círculos y quiere pintar cada uno de ellos de verde, azul o amarillo. Para divertirse un poco, decide que aquellos círculos que están unidos por una línea no sean pintados del mismo color. Determinar cuáles círculos se puede decir con seguridad que serán pintados del mismo color.

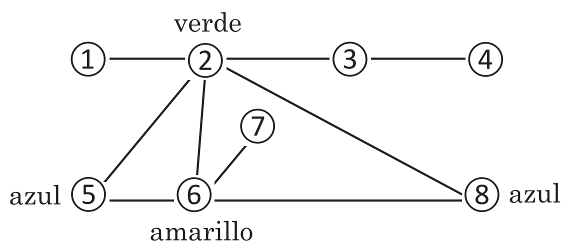


Solución.

De acuerdo al enunciado, aquellos círculos que estén unidos por una línea no pueden pintarse del mismo color. Eso quiere decir que aquellos círculos que están más restringidos son el ②, ⑤, ⑥ y ⑧ ya que de ellos salen dos líneas. Por ejemplo, cuando se elige el color para ②, el círculo del ① puede ser pintado de azul o amarillo y no tiene otra restricción.

Supongamos que pintamos de verde el ②. Eso nos limita a pintar el ⑤ y el ⑧ de azul o amarillo. Supongamos entonces, que pintamos el ⑤ de azul; como el ⑥ está unido al ② y al ⑤ y ya estan coloreados de verde y azul, respectivamente, el ⑥ debe ir pintado de amarillo.

Luego, el ⑧ está unido al ② y al ⑥, los cuales están pintados de verde y amarillo; eso quiere decir que debe pintarse de azul.

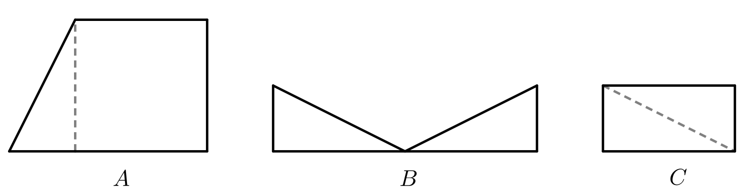


Al observar el esquema, los dos círculos que quedan pintados del mismo color son el ⑤ y el ⑧.

No importa cómo se comiencen a colorear los círculos ni de dónde se inicie, el ⑤ y el ⑧ siempre quedarán pintados del mismo color.

Problema 3

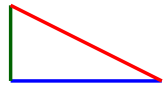
Beatriz dibuja con un molde cinco triángulos iguales y un cuadrado, formando las tres figuras que se muestran a continuación.



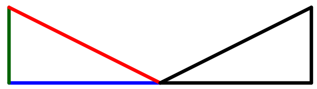
Beatriz identifica que la figura A tiene 54 cm de perímetro, la figura B tiene 60 cm de perímetro y la figura C tiene 34 cm de perímetro. Determinar la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

Solución.

Identificaremos los lados del triángulo por un color diferente cada uno:

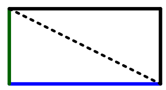


De las figuras que formó Beatriz puede deducirse de la B que el perímetro del triángulo es:



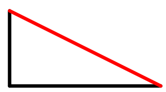
$$60 \div 2 = 30\ cm$$

Por otra parte, del perímetro de la figura C se puede calcular la suma de dos lados del triángulo, la cual se obtiene de dividir 34 entre 2:



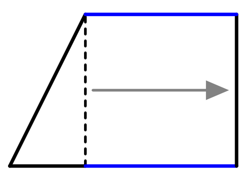
$$34 \div 2 = 17\ cm$$

Esto quiere decir que si a 30 cm le restamos 17 cm, obtenemos la medida del lado rojo del triángulo:



$$30 - 17 = 13\ cm$$

De la figura A se puede observar que el lado del cuadrado es igual a uno de los lados del triángulo. Eso quiere decir que si al perímetro de la figura A le quitamos el perímetro del triángulo, obtenemos la suma de dos lados del cuadrado:

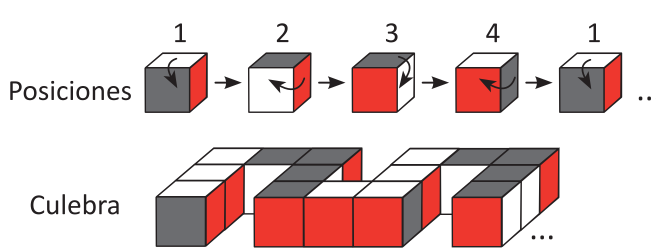


$$54 - 30 = 24\ cm$$

Entonces, el lado azul del cuadrado mide $24 \div 2 = 12\ cm$. Finalmente, el lado verde del triángulo mide $30 - 13 - 8 = 9\ cm$.

Problema 4

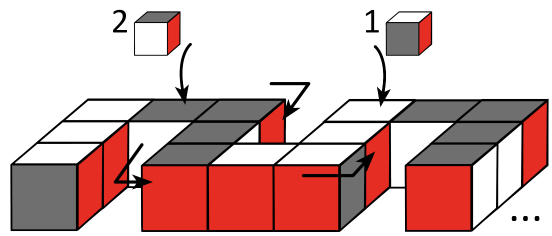
Mario tiene 50 cubitos cuyas caras opuestas son del mismo color: rojas, blancas o negras. Con todos ellos decide formar una culebra pero cada vez que cambia de dirección, cambia la posición del cubito, como se muestra a continuación:



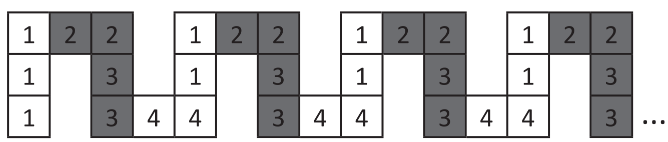
Determinar la posición del último cubito que coloca Mario en la culebra.

Solución.

Nos centraremos en como van cambiando los cubitos a partir de donde muestra la siguiente figura.



Al observar la culebra, podemos identificar que al llegar al punto donde se encuentra la última flecha se han utilizado las 4 posiciones una vez. En ese momento, hay 8 cubitos y los 3 que se colocaron al inicio. Por otra parte, se puede observar que antes de cambiar de dirección se utilizan dos cubitos en la misma posición. En la siguiente figura se muestra cómo van quedando las posiciones de los cubitos conforme va cambiando de dirección la culebra:



Si continuamos contando de ese modo se observa que cada 8 cubitos se han utilizado las 4 posiciones. Así, cuando se han utilizado $3 + 8 \times 5 = 43$ cubitos, el último que se ha colocado es en la posición 1. A partir de aquí, falta colocar los últimos 7 cubitos. Si colocásemos 8, el último estaría en la posición 1, por lo que eso nos permite concluir que el último cubito que se coloca es en la posición 1.

Problema 5

Fernando coloca 5 números en una cuadrícula para un reto matemático de la escuela. Desafortunadamente olvidó el cuaderno donde apuntó el problema, pero él recuerda los datos que se muestran y la siguiente información:

a. El producto de los primeros tres números es 540.

b. El producto de los tres números centrales es 216.

c. El producto de los últimos tres números es 144.

5				8

Determinar el número que va al centro de la cuadrícula.

Solución.

- De la primera condición se puede establecer que el producto de los números de las casillas 2 y 3 es $540 \div 5 = 108$.

- De la tercera condición se puede establecer que el producto de los números de las casillas 3 y 4 es $144 \div 8 = 18$.

Observemos que con estas dos operaciones que hemos realizado hay un número en común: el número que va al centro. Si dividimos el producto de los tres números centrales por 108 obtenemos el valor del número de la casilla 4; es decir, $216 \div 108 = 2$ es el número que va en la cuarta casilla.

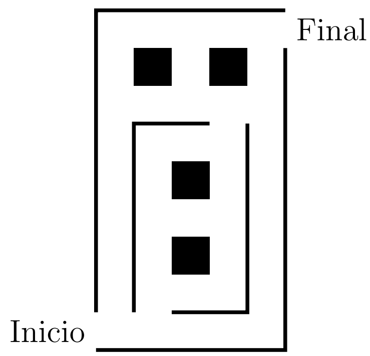
De igual forma, $216 \div 18 = 12$ es el número que es el número que va en la segunda casilla. Finalmente, para obtener el número que va al centro, puede dividirse ya sea 108 entre 12 o 18 entre 2 y obtendremos el número que va en la casilla central.

Así, el número buscado es $18 \div 2 = 9$.

XX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA
QUINTO GRADO

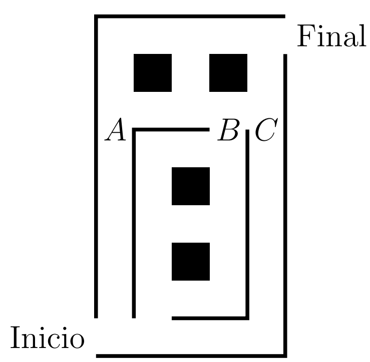
Problema 1

A continuación se muestra una pista de obstáculos en forma de laberinto. Si solo es permitido avanzar hacia arriba y hacia la derecha, determinar el total de posibles rutas en que se puede ir desde el Inicio hasta el Final.

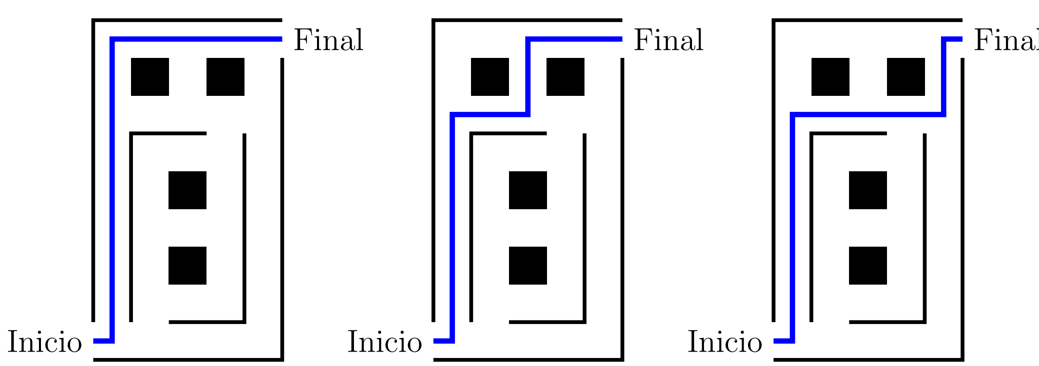


Solución.

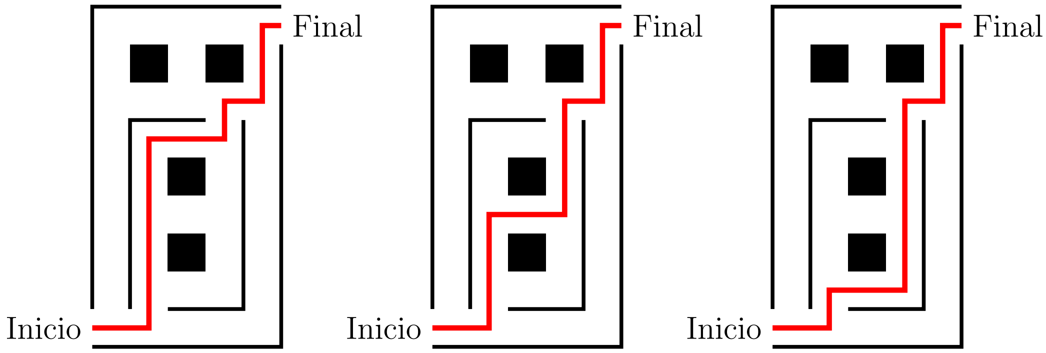
En la siguiente figura se han marcado tres puntos A, B y C de manera que nos permitan hacer el conteo.



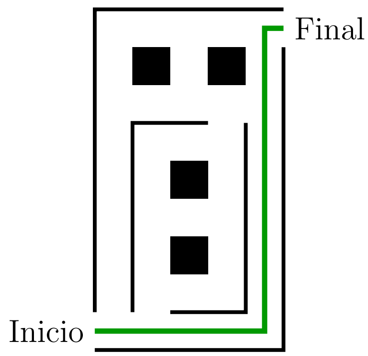
- Los caminos que pasan por A son 3.



- Los caminos que pasan por B son 3.



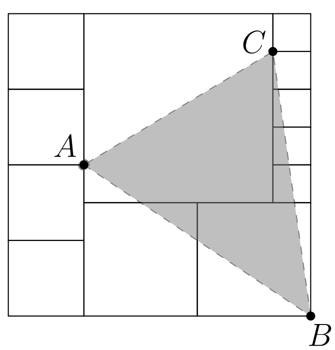
- Solo hay un camino que pasa por C.



Por lo tanto la cantidad de caminos son $3 + 3 + 1 = 7$.

Problema 2

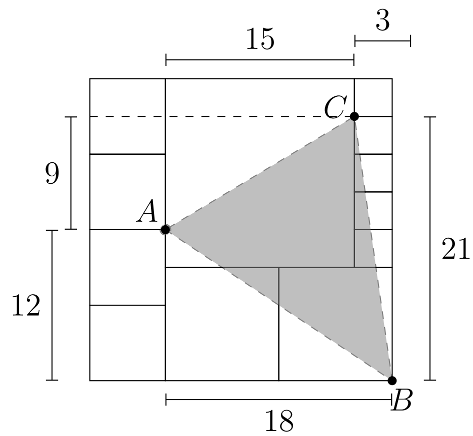
Un cuadrado de perímetro 96 cm se ha formado apilando doce cuadrados más pequeños como se muestra en la figura. Determinar el área del triángulo sombreado ABC.



Solución.

El lado del cuadrado que se ha formado es $\frac{96}{4} = 24$ cm, por lo que el lado de los cuatro cuadrados del lado izquierdo es $\frac{24}{4} = 6$ cm, luego el lado de los dos cuadrados de abajo es $\frac{24-6}{2} = 9$ cm. Por lo que el lado de los cinco cuadrados del lado derecho es $\frac{24-9}{5} = 3$ cm, y así el lado del cuadrado arriba en el centro es $24 - 6 - 3 = 15$ cm.

La respuesta se encontrará por diferencia de áreas. Con los datos de los lados de los cuadrados se tiene la siguiente figura.

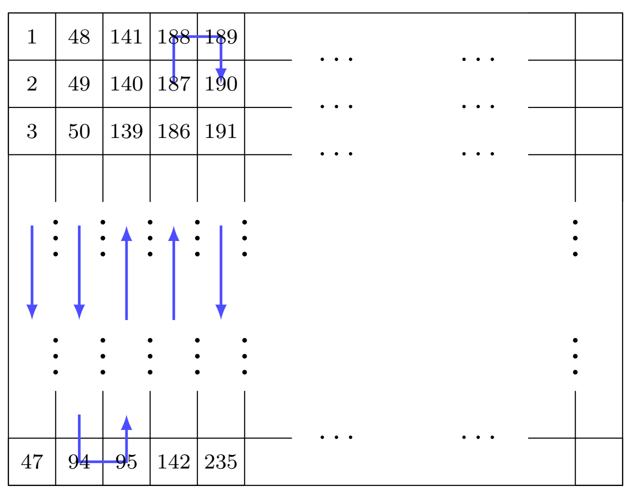


De la figura anterior, se tiene que

$$(ABC) = 18 \times 21 - \frac{15 \times 9}{2} - \frac{21 \times 3}{2} - \frac{18 \times 12}{2} = 171\ cm^2.$$

Problema 3

Una cuadrícula tiene 47 filas y 100 columnas, y se encuentra numerada como se muestra en la figura: se inicia numerando hacia abajo en las primeras dos columnas, luego hacia arriba en las siguientes dos columnas, y así se continúa alternadamente. Encontrar el número de fila y columna donde se encuentra 2020.



Solución.

Cada 47 números hay un cambio de columna, por lo que se dividirá 2020 entre 47 para encontrar el número de la columna donde se encuentra 2020.

$2020 = 47 \times 42 + 46$, así el mayor número de la columna 42 es $42 \times 47 = 1974$, y en la columna 43 se colocarán los 46 números restantes para llegar a 2020.

Para encontrar el número de fila es necesario determinar en qué dirección se numera la columna 43. Dado que se numera dos columnas hacia abajo, dos columnas hacia arriba, y así sucesivamente, entonces el patrón de la dirección de numeración se repite cada 4 columnas.

Como $43 = 4 \times 10 + 3$, entonces en la columna $4 \times 10 = 40$ se finaliza un ciclo, y en la columna 41 se inicia nuevamente numerando hacia abajo, por lo que la columna 42 también se numera hacia abajo, y la columna 43 se numera hacia arriba.

Entonces los 46 números restantes para llegar a 2020, se ubicarán en la columna 43 hacia arriba, y dado que la cuadrícula tiene 47 filas, 2020 será colocado en la segunda fila.

Solución 2.

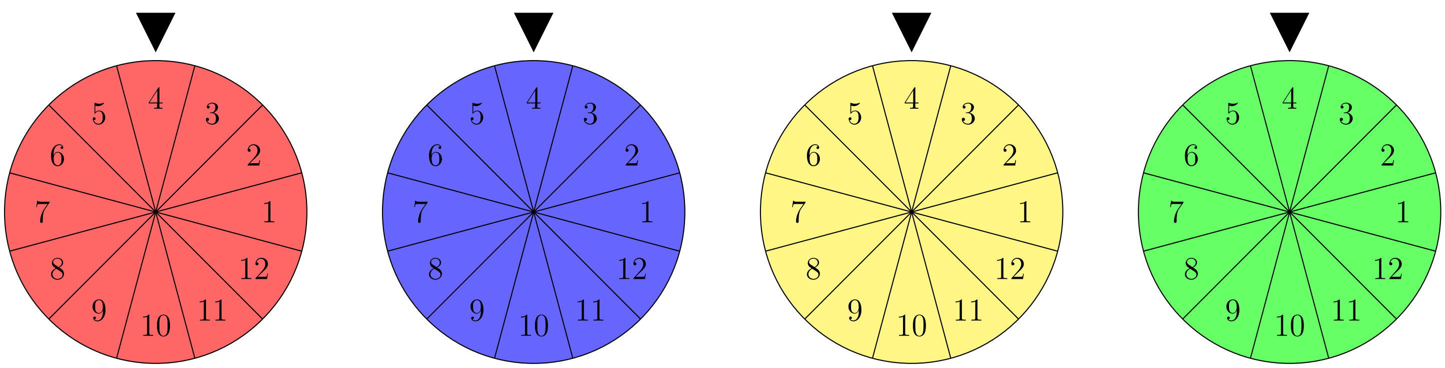
El patrón se repite cada cuatro columnas, es decir cada $47 \times 4 = 188$ números. Ya que $2020 = 188 \times 10 + 140$, entonces en la fila 1 de la columna $4 \times 10 = 40$ se habrá colocado al número $47 \times 40 = 1880$, y aún faltan 140 números por colocar.

Ya que en la columna 41 se inicia nuevamente el patrón numerando hacia abajo, y además $140 = 47 \times 2 + 46$, entonces en la fila 47 de la columna $40 + 2 = 42$ se encuentra el número $42 \times 47 = 1974$, y en la columna 43 se colocarán de abajo hacia arriba a los 46 números restantes para llegar a 2020.

Ya que la cuadrícula tiene 47 filas, entonces 2020 está en la fila 2 de la columna 43.

Problema 4 *(Problema modificado del problema 17 la olimpiada Giochi di Archimede 2019)*

En un concurso se tienen cuatro ruletas de colores diferentes: rojo, azul, amarillo y verde, cada una dividida en doce secciones numeradas del 1 al 12. Si cuatro concursantes giran a la vez las cuatro ruletas, encontrar el número total de posibilidades en las que el producto de los cuatro números obtenidos en las ruletas sea 24. Por ejemplo, las ruletas de la figura siguiente muestran el resultado rojo 4, azul 4, amarillo 4, verde 4 y su producto es 256.



Solución.

Dado que $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ y cada uno de los cuatro factores debe ser menor o igual que 12, se tienen los siguientes casos:

Caso 1: 2, 2, 2, 3. Hay 4 posibilidades ya que 3 puede aparecer en cualquiera de las cuatro ruletas, y el resto tendrán 2.

3 2 2 2	2 3 2 2	2 2 3 2	2 2 2 3

Caso 2: 1, 2, 3, 4. Hay 24 posibilidades distintas.

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Caso 3: 1, 2, 2, 6. Hay 12 posibilidades distintas.

1	2	2	6	2	2	6	1
1	2	6	2	2	6	1	2
1	6	2	2	2	6	2	1
2	1	2	6	6	1	2	2
2	1	6	2	6	2	1	2
2	2	1	6	2	6	2	1

Caso 4: 1, 1, 4, 6. De forma análoga al caso anterior, hay 12 posibilidades.
Caso 5: 1, 1, 3, 8. De forma análoga al caso 3, hay 12 posibilidades.
Caso 6: 1, 1, 2, 12. De forma análoga al caso 3, hay 12 posibilidades.

La respuesta es $4 + 24 + 12 + 12 + 12 + 12 = 76$ posibilidades.

Problema 5

En una ciudad hay tres tipos de personas: los honestos que siempre dicen la verdad, los mentirosos que siempre mienten, y los indecisos que también mienten siempre, pero solo hablan si la persona que habló antes de ellos es honesta, por esta razón los indecisos nunca pueden iniciar una conversación. Cierto día se reúnen cinco amigos y en el siguiente orden hacen cinco afirmaciones:

Ana: "Carlos es honesto"
Bernardo: "Ana es mentirosa"
Carlos: "Daniela es honesta"
Daniela: "Bernardo es de mi tipo"
Ernesto: "Bernardo miente"
Determinar de qué tipo son Daniela y Ernesto.

Solución.

Ya que Ana habla primero, no puede ser indecisa. Notar que Ana tampoco puede ser honesta, porque de ser así, Carlos sería honesto, lo que a su vez implica que Daniela es honesta, por lo que Bernardo también lo sería, y así Ana sería mentirosa, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, Ana es mentirosa, entonces Bernardo dice la verdad, por lo que Bernardo es honesto.

$$A-h \longrightarrow C-h \longrightarrow D-h \longrightarrow B-h \longrightarrow A-m \ \times$$
$$A-m \longrightarrow B-h \ \checkmark$$

Por otra lado, al ser Ana es mentirosa, Carlos no es honesto, por lo que puede ser mentiroso o indeciso.

Si Carlos es mentiroso entonces Daniela puede ser mentirosa o indecisa, pero Daniela no puede ser indecisa pues implicaría que Carlos es honesto, así tenemos que Daniela es mentirosa, y no hay contradicción porque Bernardo es honesto. Por lo tanto, si Carlos es mentiroso, entonces Daniela es mentirosa.

En el caso que Carlos sea indeciso, entonces Bernardo es honesto y no hay contradicción; además ya que Carlos miente, entonces Daniela puede ser mentirosa o indecisa, pero no puede ser indecisa porque eso implicaría que Carlos es honesto; así Daniela debe ser mentirosa, y nuevamente no hay contradicción ya que Bernardo es honesto. Por lo tanto si Carlos es indeciso también se concluye que Daniela es mentirosa.

Así en cualquier caso tenemos que Ana es mentirosa, Bernardo es honesto y Daniela es mentirosa, lo cual implica que Ernesto está mintiendo, y no puede ser indeciso pues Daniela es mentirosa, así Ernesto es mentiroso.

A continuación se presenta un diagrama que muestra las distintas situaciones.

$$\begin{tikzcd}
 & & D-i \arrow[r] & C-h \;\times \\
 & C-m \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & D-m \;\checkmark & \\
A-m \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \\
 & & D-i \arrow[r] & C-h \;\times \\
 & C-i \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & D-m \;\checkmark &
\end{tikzcd}$$

Problema 1

Hay 2020 casas ubicadas en fila, las cuales serán pintadas de azul o blanco. Los habitantes no quieren que haya tres casas seguidas pintadas del mismo color. Determinar la mayor cantidad de casas que se pueden pintar de azul.

Solución.

Imaginemos que las casas están numeradas y calculemos la cantidad de grupos de casas que resultan al contarlas de tres en tres:

$$\begin{array}{r|l} 2020 & \quad 3 \\ \cline{2-2} 1 & \ 673 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 2020 = 3 \times 673 + 1$$

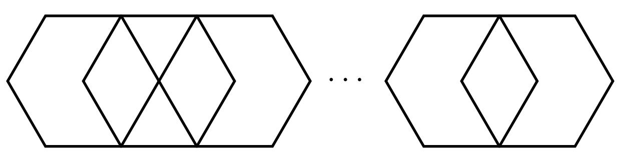
Por tanto hay 674 bloques:

$$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), \ldots, (2017, 2018, 2019), (2020).$$

Cada uno de los bloques puede tener a lo sumo dos casas pintadas de azul, por lo que como máximo pueden haber $2 \times 673 + 1 = 1347$ casas pintadas de azul. Una configuración posible es que las casas en los 673 bloques se pinten de color azul, azul, blanco y la última de color azul.

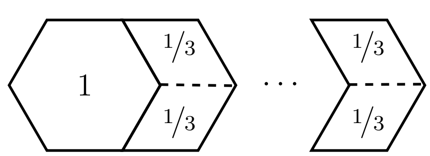
Problema 2 *(Propuesto por Mario Alexis Ruiz)*

La siguiente figura se ha construido traslapando 2020 hexágonos regulares de área 1 cm^2. Calcular el área de la figura construida.



Solución.

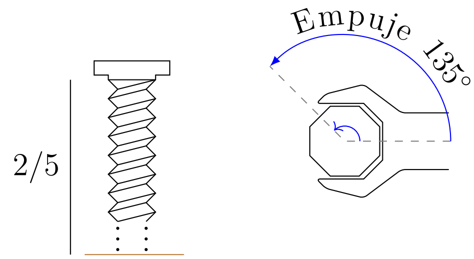
Se divide la figura en áreas que no se traslapan de la siguiente manera:



Luego se calcula el área de la figura: $1 + \frac{2}{3} \cdot 2019 = 1347\ cm^2$.

Problema 3 *(Propuesto por Mario Alexis Ruiz)*

Carlos ha extraído dos quintas partes de un tornillo que está incrustado en la superficie de una mesa. Cada vez que hace un empuje al tornillo con la llave, lo gira 135° y extrae 0.75 mm de altura. Sabiendo que para extraer las dos quintas partes, el tornillo ha dado 45 giros completos, cada uno de 360°, calcular la longitud del tornillo y la cantidad de giros necesarios para sacar la parte restante que está incrustada en la mesa.



Solución.

Carlos ha girado el tornillo un total de

$$360° \times 45 = 16200°,$$

entonces la cantidad de empujes que ha dado la llave es $\frac{16200}{135} = 120$.

Lo que significa que se ha extraído $0.75 \times 120 = 90$ mm del tornillo, y ya que esto equivale a dos quintos del total del tornillo, entonces el tornillo mide

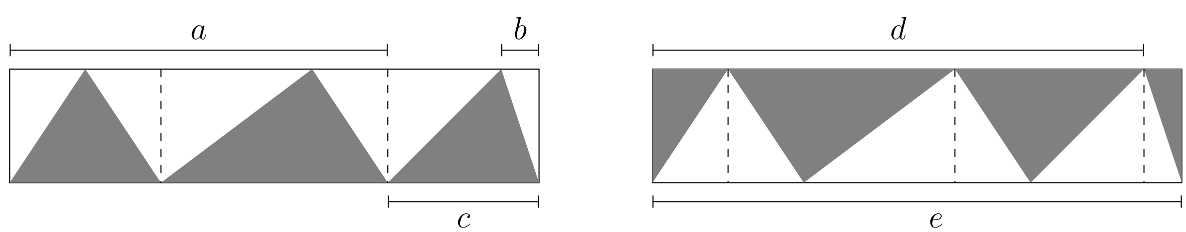
$$\frac{90 \times 5}{2} = 225 \ mm.$$

Por otro lado, como extraer $\frac{2}{5}$ del tornillo ha requerido 45 giros completos, entonces extraer $\frac{1}{5}$ va a requerir $\frac{45}{2} = 22.5$ giros, por lo que extraer los $\frac{3}{5}$ restantes llevará

$$3 \times 22.5 = 67.5 \text{ giros}$$

Problema 4 *(Propuesto por María Cecilia Martínez)*

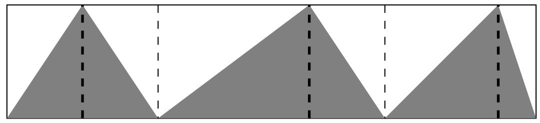
Se tienen dos piezas rectangulares iguales pero de colores invertidos, como se muestra en la siguiente figura. Si se sabe que el área sombreada en la Pieza 1 es 48 cm^2 y que la suma de las longitudes $a + b + c + d + e$ es 36 cm, calcular el valor de la altura de cada pieza rectangular.



Solución.

La suma de las longitudes es el triple de la base de cada pieza, por lo que la base mide $\frac{36}{3} = 12$ cm.

Se dividirá la Pieza 1 en seis rectángulos:



Notar que en cada rectángulo, la parte sombreada ocupa la mitad del área del dicho rectángulo, por lo que el área total de la zona sombreada es la mitad del área de la Pieza 1. Dado que esta área es 48 cm^2, entonces el área de la Pieza 1 es $2 \times 48 = 96$ cm^2.

Luego, como que su base mide 12 cm, entonces su altura mide $\frac{96}{12} = 8$ cm.

Problema 5 *(Propuesto por Mynor Melara)*

En el bosque encantado hay una planta mágica que el 31 de diciembre de cada año, a las 11 de la noche pierde todas sus hojas y le brota una flor con 100 pétalos. Desde el 1 de enero, cada día a las 2 de la tarde a la planta le crecen 3 hojas y pierde 2 pétalos, hasta que la flor se queda sin pétalos. A partir de entonces, cada día que pasa, a las 2 de la tarde a la planta le crece solo una hoja adicional. Además, la planta pierde la mitad de sus hojas cada vez que a las 6 de la tarde el número de hojas es igual al de pétalos. Calcular la cantidad de hojas que tendrá la planta el 31 de diciembre del 2020 a las 10 de la noche.

Solución.

Desde el 1 de enero, cada día que pasa, a la planta le crecen tres hojas y pierde dos pétalos, lo cual se muestra en la siguiente tabla:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hojas	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Pétalos	98	96	94	92	90	88	86	84	82	80

Días	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Hojas	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
Pétalos	78	76	74	72	70	68	66	64	62	60

Entonces a los 20 días, la planta tendrá el mismo número de hojas que de pétalos y perderá la mitad de las hojas, quedando con 30 hojas y 60 pétalos. Luego, las hojas y pétalos continúan creciendo como se muestra a continuación:

Días	21	22	23	24	25	26
Hojas	33	36	39	42	45	48
Pétalos	58	56	54	52	50	48

Aquí la planta vuelve a perder la mitad de las hojas, quedando con 24 hojas, 48 pétalos y continúa el proceso:

Días	27	28	29	30	31	...
Hojas	27	30	33	36	39	...
Pétalos	46	44	42	40	38	...

A partir del día 31 la planta tendrá menos pétalos que hojas, por lo que ambos números ya no podrán ser iguales y la planta ya no perderá más hojas.

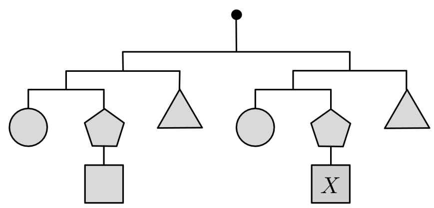
Como quedan $38 = 19 \times 2$ pétalos, en 19 días más la planta se quedará sin pétalos, teniendo a los $31 + 19 = 50$ días, $39 + 19 \times 3 = 96$ hojas.

A partir de ese momento, cada día a la planta le crecerá solo una hoja y como 2020 es bisiesto, faltan $366 - 50 = 316$ días para el 31 de diciembre.

Por lo tanto, el 31 de diciembre del 2020 a las 10 de la noche, la planta tendrá $96 + 316 = 412$ hojas.

Problema 1

La balanza de la figura está equilibrada y cada objeto pesa una cantidad entera de gramos mayor que cero. Si la suma de los pesos de todos los objetos es menor a 2020 gramos, determinar el mayor peso que puede tener el objeto marcado con X.



Solución.

Para estar equilibrados, todos los objetos del lado derecho de la balanza suman la mitad del peso total. Además, se observa en la figura que el triángulo debe pesar igual que el círculo, el pentágono y el cuadrado juntos, lo que debe ser la mitad de la mitad del peso total, equivalente a un cuarto del peso total. Luego, el pentágono junto con el cuadrado deben sumar un octavo del peso total.

Como el cuadrado debe pesar el mayor número entero de gramos posible, el peso total debe ser lo mayor posible, así que se busca el mayor número entero tal que su octava parte sea entera y que sea menor a 2020. Como 2016 es el mayor número divisible entre 8 y menor a 2020, se tiene que el peso total de los objetos es 2016 gramos y el peso del cuadrado y el pentágono juntos es la octava parte de 2016, lo cual da 252 gramos.

Finalmente, como el cuadrado debe pesar lo más posible y el peso del pentágono es un número entero mayor que cero gramos, el pentágono debe pesar al menos 1 gramo y por lo tanto, el mayor peso posible para el cuadrado marcado con X es de 251 gramos.

Solución 2.

Como se desea que el peso del objeto marcado con X sea el mayor posible y dado que el peso total de los objetos debe ser menor a 2020, se puede probar con 2019 gramos como el peso total, pero ese valor no es aceptable porque para estar en equilibrio los pesos de los objetos a la derecha de la balanza suman un número entero de gramos igual a la mitad del peso total, pero la mitad de 2019 no es entera.

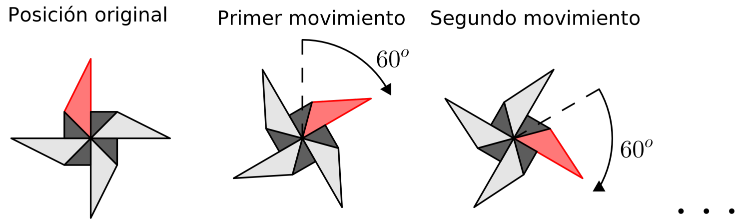
Si el peso total fuera 2018 gramos, los pesos a la derecha de la balanza sumarían $2018 \div 2 = 1009$ gramos, pero este número debe dividirse de nuevo a la mitad, puesto que el triángulo pesa igual que el círculo, el pentágono y el cuadrado juntos. Como la mitad de 1009 no es entera, se descarta también que el peso total de los objetos sea 2018. Por similar razón que el 2019, el peso total de los objetos no puede ser 2017 gramos, ni algún otro número impar.

Si se prueba con 2016 gramos siendo el peso total de los objetos, para estar en equilibrio, todos los objetos en la derecha de la balanza pesan $2016 \div 2 = 1008$ gramos, luego, el pentágono, el círculo y el cuadrado pesan juntos $1008 \div 2 = 504$ gramos y entonces, el cuadrado y el pentágono pesan juntos $504 \div 2 = 252$ gramos.

Ahora, como el cuadrado debe pesar lo más posible y el peso del pentágono es un número entero mayor que cero gramos, el pentágono debe pesar al menos 1 gramo y por lo tanto, el mayor peso posible para el cuadrado marcado con X es de 251 gramos.

Problema 2 *(Propuesto por Mynor Melara)*

Andrea construyó un molinito mecánico de cuatro aspas, con una de ellas de color rojo. Luego, lo programó para que haga 2020 movimientos consecutivos, cada uno de los cuales consiste en que sus aspas roten 60^o en sentido horario. Determinar el menor ángulo que le hará falta rotar al molinito para que el aspa roja vuelva a su posición original, a partir de la posición en que queda luego de hacer los 2020 movimientos.



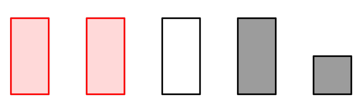
Solución.

Como en cada movimiento del molinito las aspas rotan $60°$, una rotación completa tiene $360°$ y $360 = 60(6)$, se tiene que cada 6 movimientos el molinito regresa exactamente a su posición original.

Además, por el algoritmo de la división se tiene que $2020 = 336(6) + 4$, así que, después de los 2020 movimientos, al molinito le harán falta dos movimientos para regresar a la posición original, lo que significa que le hará falta rotar $2(60°) = 120°$ en sentido horario para que el aspa roja quede en su posición original.

Problema 3 *(Propuesto por Mynor Melara)*

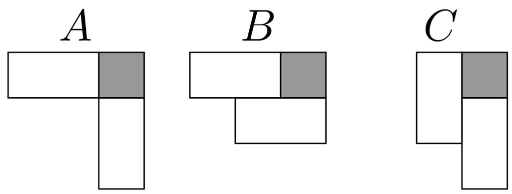
Con las cuatro tablitas rectangulares de 2 cm por 4 cm y la tablita cuadrada de lado 2 cm, que se muestran a continuación, se desea formar un cuadrado de lado 6 cm. Determinar el número de diseños diferentes que existen para el cuadrado a formar, si las tablitas de igual color no deben hacer contacto, salvo tal vez en un punto en sus esquinas. Aquellos diseños que al rotarlos pueden hacerse coincidir se consideran iguales.



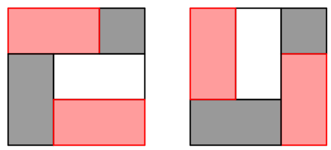
Solución.

Como la tablita cuadrada es negra y hay una tablita rectangular negra, ocurre que la tablita cuadrada no puede ir al centro del cuadrado de lado 6 cm porque ambas tablitas negras harían contacto. También, es imposible formar el cuadrado de 6 cm colocando la tablita cuadrada al centro de un borde del cuadrado de lado 6 cm, por lo que la tablita cuadrada solamente puede colocarse en las esquinas.

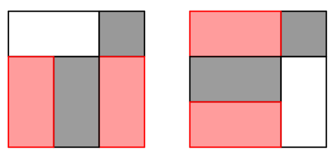
Como los diseños que al rotarlos coinciden cuentan como el mismo, basta colocar la tablita cuadrada solo en una de las esquinas, así que se colocará en la esquina superior derecha y entonces hay tres opciones para colocar las tablitas rectangulares que harán contacto con los lados de la tablita cuadrada, sin elegir aún su color el cual solo puede ser rojo o blanco:



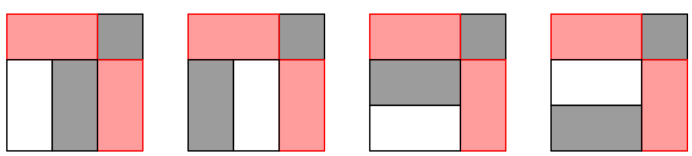
En cada una de esas tres opciones, las dos tablitas rectangulares colocadas pueden ser una roja y una blanca. Solo en la opción A pueden ser ambas rojas, porque en las otras dos opciones están haciendo contacto entre sí y deben tener distinto color. De hecho, dado que las dos tablitas rojas no deben hacer contacto, para las opciones B y C solo hay una manera de completar cada una y seleccionar el color de las tablitas, esto es colocando las tablitas rojas en bordes opuestos, como se muestra a continuación:



Luego, para la opción A, en el caso que una de las tablitas ya colocadas es roja y la otra blanca, una vez decidido cuál de las dos es roja, solo hay una manera de completarla para que las tablitas rojas no queden juntas, por lo que se tendrían dos diseños más:



Finalmente, para el caso que en la opción A las dos tablitas ya colocadas son rojas, entonces hay cuatro maneras de completarla, dado que la tablita blanca y la negra ya no tendrían restricciones para llenar el espacio cuadrado de lado 4 cm que falta:



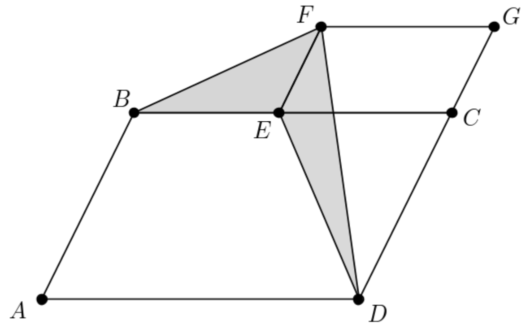
Por lo tanto, existen 8 diseños diferentes para el cuadrado de lado 6 cm que se desea formar con las cinco tablitas.

Problema 4

En la figura siguiente, $ABCD$ es un paralelogramo de área 24 cm^2. También $CEFG$ es un paralelogramo, tal que E es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$ y G es un punto en la prolongación de $\overline{DC}$. Si $\overline{CG}$ mide la mitad que $\overline{DC}$:

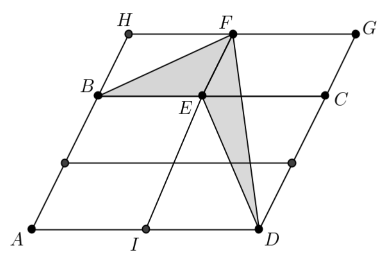
a. Calcular el área de la región sombreada cuando E es el punto medio de $\overline{BC}$.

b. Demostrar que al calcular el área de la región sombreada, para cualquier posición de E sobre $\overline{BC}$, siempre se obtiene el mismo valor.



Solución.

a. Si E es el punto medio de $\overline{BC}$, trazando dos segmentos de recta que unan los puntos medios de los lados opuestos del paralelogramo $ABCD$, que tiene 24 cm^2 de área, éste queda dividido en cuatro paralelogramos congruentes, cada uno de área 6 cm^2. Como $\overline{CG}$ mide la mitad que $\overline{DC}$ y E es el punto medio de BC, se tiene que el paralelogramo $EFGC$ es congruente con cada uno de esos cuatro paralelogramos. Luego, completando la figura con un punto H tal que $AHGD$ sea un paralelogramo, se observa que ese paralelogramo queda dividido en seis paralelogramos congruentes, de área 6 cm^2 cada uno, como muestra la imagen siguiente:



Luego, por ser la mitad de uno de los paralelogramos, el triángulo BFE tiene 3 cm^2 de área y si al paralelogramo $IFGD$, que tiene 18 cm^2 de área, se le quita el triángulo FGD, que tiene 9 cm^2 de área por ser la mitad de $IFGD$, y se quita el triángulo IED, que tiene 6 cm^2 de área por ser la mitad de $IECD$, queda el triángulo EFD con área 18 $cm^2 - 9$ $cm^2 - 6$ $cm^2 = 3$ cm^2. Por lo tanto, el área sombreada que corresponde al área de los triágulos BFE y EFD, mide 6 cm^2.

b. Si E es cualquier punto sobre $\overline{BC}$, entonces el triángulo EFD tiene igual área que el triángulo EFC, porque siendo $\overline{CD}$ paralelo a $\overline{EF}$, ambos triángulos tienen igual altura si se considera $\overline{EF}$ como la base de ambos.

Luego, el área sombreada es igual al área del triángulo BFC. Enotnces, considerando $\overline{BC}$ como la base del triángulo BFC, la altura de BFC corresponde a la distancia entre $\overline{BC}$ y la paralela a $\overline{BC}$ que pasa por G. Como esa distancia no cambia aunque cambie la posición de E sobre $\overline{BC}$, se concluye que el área de BFC no cambia cuando cambia la posición de E y así, la medida del área sombreada es igual para cualquier posición de E en $\overline{BC}$.

Solución 2.

Si E es cualquier punto sobre $\overline{BC}$, entonces el triángulo EFD tiene igual área que el triángulo EFC, pues dado que $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{EF}$, ambos triángulos tendrían igual altura si se considera $\overline{EF}$ como la base de ambos.

Luego, el área sombreada es igual al área del triángulo BFC. Considerando $\overline{BC}$ como la base del triángulo BFC, se tiene que su altura corresponde a la distancia entre los segmentos $\overline{FG}$ y $\overline{BC}$, por ser paralelos. Como CG mide la mitad que DC y BC es paralelo con AD, se tiene que la distancia entre los segmentos FG y BC es la mitad de la distancia entre BC y AD, es decir que la altura del triángulo BFC es la mitad de la altura del paralelogramo $ABCD$ y las bases de ambos tienen igual medida.

Luego, el área del triángulo BFC es la mitad del área de un paralelogramo que tenga igual base e igual altura, y a su vez, el área de este paralelogramo que tendría igual base que $ABCD$ pero con la mitad de su altura, sería igual a la mitad del área de $ABCD$, que es 24 cm^2. Por tanto, el área de BFC es la mitad de la mitad de 24 cm^2, así, el área de BFC es 6 cm^2 para cualquier posición de E sobre $\overline{BC}$. En particular, el área de BFC es 6 cm^2 cuando E es el punto medio de $\overline{BC}$.

Solución 3.

Considerando el caso extremo en que E coincida con C, se tiene que el área sombreada se reduce al triángulo BGC. Esto lleva a suponer que si E es cualquier punto sobre $\overline{BC}$, el área sombreada mide igual que el área del triángulo BGC.

De hecho, el triángulo BGC está compuesto por los triángulos BGE y EGC. Se tiene que el área de BGE es igual al área del triángulo BFE, por tener a $\overline{BE}$ como base común y tener igual altura al ser $\overline{FG}$ paralelo a $\overline{BE}$. También, el área de EGC mide igual que el área de EFD, pues al ser $EFGC$ un paralelogramo, se tiene que $\overline{EF}$ mide igual que $\overline{CG}$ y al considerar $\overline{EF}$ como la base de EFD y $\overline{CG}$ como la base de EGC, entonces ambos triángulos tendrían también igual altura por ser $\overline{DG}$ paralelo a $\overline{EF}$.

Entonces, el área sombreada es igual a la suma de las áreas de los triángulos BFE y EFD, que a su vez tienen igual área que los triángulos BGE y EGC, respectivamente, los cuales forman al triángulo BGC, lo cual confirma la suposición.

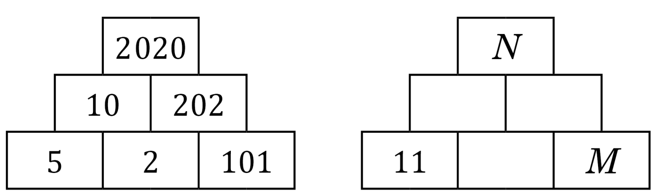
Como el área del triángulo BGC es fija, se concluye que el área sombreada tiene igual valor para cualquier posición de E sobre $\overline{BC}$.

Luego, considerando el punto H tal que $AHGD$ sea un paralelogramo y trazando el segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, como CG mide la mitad que DC, se tiene que $AHGD$ queda dividido en tres paralelogramos congruentes con $BHGC$, dos de los cuales forman a $ABCD$ que tiene área 24 cm^2, así, el área de $BHGC$ es 12 cm^2. Como el triángulo BGC es la mitad de $BHGC$, se concluye que el área de BGC es 6 cm^2, que también es lo que mide el área sombreada para cualquier posición de E sobre $\overline{BC}$. En particular, el área de BFC es 6 cm^2 cuando E es el punto medio de $\overline{BC}$.

Problema 5 *(Propuesto por Mynor Melara)*

Jorgito llenó las casillas de la pirámide de la izquierda con números naturales de manera que, a partir de la segunda fila, el número en cada casilla es el producto de los números en las dos casillas que están inmediatamente abajo de ella. Luego, Jorgito completará con las mismas condiciones la pirámide de la derecha, pero desea que el número N sea un número de cinco cifras de la forma $\overline{abcab}$ y que el número M sea menor a 20. Determinar todos los valores posibles de N.

Observación: El número 2020 es un número de cuatro cifras de la forma $\overline{abab}$.



Solución.

Como N es de la forma $\overline{abcab}$ y es múltiplo de 11, por el criterio de divisibilidad entre 11 se tiene que $(a+c+b)-(b+a)=c$ debe ser un dígito múltiplo de 11, por lo que debe ser $c=0$ y así N es de la forma $\overline{ab0ab}$.

Luego, tomando algunos números de la forma $\overline{ab0ab}$, por ejemplo $10010 = 2(5)(7)11)(13)$, $11011 = 7(11)^2(13)$, $12012 = 2^2(3)(7)(11)(13)$, $13013 = 7(11)(13)^2$, $14014 = 2(7)^2(11)(13)$, $15015 = 3(5)(7)(11)(13)$, da la impresión que 7, 11 y 13 siempre aparecen como factores y en ese caso N sería múltiplo de $7(11)(13) = 1001$. De hecho, esto es cierto porque por ejemplo $15015 = 15000 + 15 = 1000(15) + 15 = 1001(15)$ y en general $N = \overline{ab0ab} = \overline{ab000} + \overline{ab} = 1000(\overline{ab}) + \overline{ab} = 1001(\overline{ab})$, donde $\overline{ab}$ sería un número de dos cifras. Luego, $N = 7(11)(13)(\overline{ab})$.

Por otro lado, debido al proceso de llenado de la pirámide, el número N en la cima de la pirámide es igual al producto de 11 por M por el cuadrado del número que se escriba abajo, en la casilla junto al 11. Es decir, $N = 11(\square)^2(M)$, donde $\square$ debe ser llenado con algún número natural.

Como N debe tener al menos un factor 7 y al menos un factor 13, si el espacio en el $\square$ es llenado con el producto $7(13)$, entonces se tendría $N = 11\left(7(13)\right)^2(M) = 11(7)^2(13)^2(M) = 1001(91)(M)$, por lo que M solo podría ser 1 y tampoco se podría agregar otro factor más al $7(13)$ dentro del $\square$, así $N = 91091$.

Luego, se tiene la opción que uno de los números 7 o 13 sea un factor dentro de $\square$ y el otro sea un factor de M. Entonces, si 13 es factor de M, la única opción es $M = 13$ y $N = 11(7)^2(x)^2(13) = 1001(7)(x^2)$, donde x es un número natural, así, x solo puede ser 2 o 3 y $N = 28028$ o $N = 63063$.

Si 7 es factor de M hay dos opciones: $M = 7$ o $M = 14$, así $N = 11(13)^2(y)^2(7) = 1001(13)(y)^2$ o $N = 11(13)^2(y)^2(14) = 1001(26)(y)^2$, de donde las únicas opciones son $y = 1$ o $y = 2$ para el primero y $y = 1$ para el segundo, así puede ser $N = 13013$, $N = 52052$ o $N = 26026$.

Finalmente, se observa que no puede ser que dentro de $\square$ no haya alguno de los factores 7 o 13, porque entonces ambos serían factores de M, que debe ser menor a 20.

En conclusión, los seis valores posibles de N son: $N = 91091$, $N = 28028$, $N = 63063$, $N = 13013$, $N = 52052$ y $N = 26026$.

Problema 1

Tres grifos se abren y cierran de forma regular: cada uno de ellos se mantiene abierto por unas horas, y luego queda cerrado la misma cantidad de tiempo. El grifo A se abre por 5 horas, el grifo B por 6, y el grifo C por 8 horas. Los grifos B y C se abren por primera vez al mismo tiempo y el grifo A se abre 2 horas más tarde. Determinar dentro de cuántas horas se abrirán al mismo tiempo los tres grifos luego de abrir por primera vez el grifo A.

Solución.

Si los grifos se abrieran al mismo tiempo, bastaría encontrar el mínimo común múltiplo de los tiempos 10, 12 y 16 para determinar cuándo se volverán a abrir juntos, dado que cada grifo tiene un ciclo igual a dos veces el tiempo que pasa encendido:

$$ciclo = (tiempoencendido) + (tiempoapagado) = 2 * (tiempoencendido).$$

Es decir: M.C.M(10,12,16) = 240 horas. Sin embargo, el primero de ellos se abre con 2 horas de retraso. Esto deja únicamente a los grifos B y C en sincronía, con un ciclo combinado de

$$M.C.M(12, 16) = 48.$$

horas. Para encontrar la sincronía de estos dos grifos con el primero, retrasado dos horas, debemos encontrar un múltiplo del ciclo combinado de ambos (48) que sea igual a 2 horas más n ciclos completos del grifo A. Es decir:

$$48m = 10n + 2.$$

Donde m es el número de ciclos combinados de los grifos B y C que transcurre, y n el número de ciclos completos del grifo A en tiempo similar. Como $10n$ siempre termina en cero, es fácil ver que $10n + 2$ termina en 2. Además, $48m = (40 + 8)m = 40m + 8m$, y $40m$ termina siempre en cero, por lo que es necesario que $8m$ termine en 2 para poder resolver la igualdad. Como queremos encontrar el primer momento en el que coinciden los 3 grifos, necesitamos el menor de todos los m. Basta hacer un par de pruebas para encontrar que $m = 4$, multiplicado por 48, da como resultado un número que termina en 2:

$$48(4) = 192.$$

Entonces:

$$48m = 48(4) = 192 = 10n + 2 \Rightarrow n = 19.$$

Con esto concluimos que luego de 190 horas después de abrir el primer grifo, los tres grifos se abrirán al mismo tiempo.

Problema 2

Un libro contiene 30 cuentos, cada uno de los cuales comienza en una nueva página. Las longitudes de los cuentos son $1, 2, 3, ..., 30$ páginas, pero no necesariamente en ese orden. El primer cuento comienza en la página 1. Determinar el mayor número de cuentos que pueden comenzar en páginas impares.

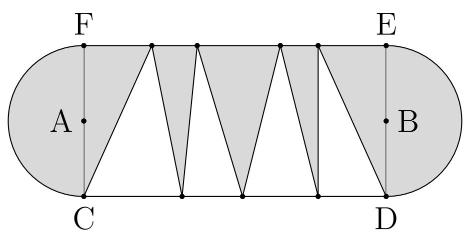
Solución.

Notemos que un cuento que tenga una longitud de páginas impar empezará en un número de página de diferente paridad que el cuento siguiente, mientras que los cuentos de longitud de páginas par mantendrán la paridad con el cuento siguiente. El primer cuento empieza en página impar y tenemos 15 cuentos de longitud par que permiten mantener el inicio de los cuentos en un número de página impar. Con los 15 cuentos restantes, sin embargo, sólo podremos colocar 8 cuentos iniciando en página impar (el resto cambiará inevitablemente la paridad del cuento siguiente, haciendo que de cada dos cuentos, al menos uno inicie en página par).

Como resultado, tenemos como máximo $15 + 8 = 23$ cuentos iniciando en página impar. Este máximo se puede alcanzar colocando primero todos los cuentos de longitud de páginas par y luego todos los cuentos de longitud impar.

Problema 3

El área sombreada en la figura es igual a 25 cm^2. Además, se sabe que el lado CD del rectángulo $CDEF$ es el doble del lado DE, y que los semicírculos laterales $\widehat{CF}$ y $\widehat{DE}$ tienen centro en A y B, respectivamente. Determinar el perímetro de la figura.



Solución.

Sea r el radio del semicírculo con centro en A. Dado que $CDEF$ es rectángulo, tenemos que:

$$CF = DE \Rightarrow r_A = r_B = r$$

Donde r_A, r_B son los radios de los semicírculos con radio en A y en B, respectivamente. Además, como $CD = 2CF$ y $CF = 2r \Rightarrow CD = 4r$.

- El área total del rectángulo $CDEF$ es $CD \cdot CF = (4r)\dot{}(2r) = 8r^2$.
- El área de los 4 triángulos blancos dentro del rectángulo $CDEF$ es:

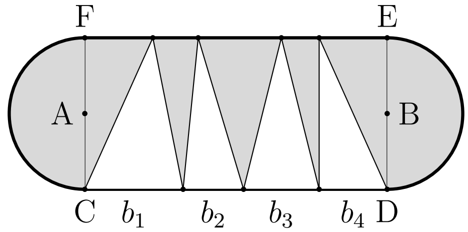
$$\frac{b_1 \cdot CF}{2} + \frac{b_2 \cdot CF}{2} + \frac{b_3 \cdot CF}{2} + \frac{b_4 \cdot CF}{2} = \frac{CF}{2} \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = \frac{CF \cdot CD}{2} = 4r^2.$$

- El área sombreada dentro del rectángulo $CDEF$ será igual al área total menos el área blanca:

$$8r^2 - 4r^2 = 4r^2.$$

- El área de cada semicírculo es igual a $\frac{\pi r^2}{2}$, por lo que el área combinada de ambos es $(2)\frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2$.
- El área sombreada total es igual a:

$$\pi r^2 + 4r^2 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{25}{4 + \pi}}.$$



Por otro lado:

- El perímetro de cada semicírculo es igual a $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.
- El perímetro combinado de ambos semicírculos es igual a $2\pi r$.
- $CD + FE = 4r + 4r = 8r$.

Finalmente, el perímetro total de la figura es igual a:

$$8r + 2\pi r = r(8 + 2\pi) = \left(\sqrt{\frac{25}{4+\pi}}\right)(8 + 2\pi) = 16.1541.$$

Problema 4

María y Carmen juegan por turnos con un número de la siguiente forma: si el número es par, lo dividen entre dos, y si es impar, le restan uno. Si María inicia el juego con el número $2^{2020} + 2020$, determinar quién de las dos obtendrá el número 1 luego de su turno.

Solución.

Sea $b_n b_{n-1} b_{n-2} ... b_1 b_0$ la representación binaria de un número m. Si m es par, $b_0 = 0$, y si m es impar, $b_0 = 1$. Dividir el número m entre 2 equivaldría a eliminar b_0, asumiendo m par; restar 1 a m sería equivalente a cambiar b_0 de 1 a 0, asumiendo m impar.

De esta observación se observa que el número de turnos que María y Carmen pueden realizar con un número m es igual a $(n-1) + (r-1)$, donde n es el número de cifras de la representación binaria de m, y r es la cantidad de 1s que dicha representación tiene. El $(n-1)$ viene de que al final queda una única cifra, el número 1; el $(r-1)$ se debe a que b_n es siempre 1, y nunca se elimina.

El equivalente de 2020 base binaria es: $2020_{10} = 11111100100_2$, una representación de 11 cifras y 7 unos. Si María y Carmen jugaran con este número, la partida duraría $(11-1) + (7-1) = 16$ turnos. Iniciando María, será Carmen quien obtenga el número 1 luego de su turno (María juega turnos impares, y Carmen juega los turnos pares).

El número 2^{2020} tiene 2021 cifras binarias: $2^{2020} = 1000...000_2$, un 1 seguido de 2020 ceros. Si a este número le sumamos 2020, el número de cifras no cambiará (2020 es muy pequeño comparado con 2^{2020}), pero se agregará un 1 a la representación.

Por lo tanto, iniciar el juego con el número $2^{2020} + 2020$ implicará $(2021 - 1) + (8 - 1) = 2027$ turnos. Iniciando María, será ella quien obtenga el número 1 luego de jugar uno de sus turno (el turno $(2027 + 1)/2 = 1014$).

Problema 5

En la esquina superior derecha de un tablero de 50×50 se coloca el número 1. Luego, se selecciona una casilla vacía vecina y se coloca el número 2. Este procedimiento se repite seleccionando siempre una casilla vacía vecina del último número escrito, y se escribe el número siguiente. Determinar si es posible, bajo una secuencia de pasos determinada, colocar el número 2020 en la esquina inferior izquierda.

Observación: Dos casillas se consideran vecinas si tienen un lado en común.

Solución.

Enumeremos las columnas del tablero de derecha a izquierda, empezando del 1 hasta llegar al 50, y las filas del tablero de arriba hacia abajo, empezando siempre desde el 1 hasta llegar al 50. Para cada número i, llamemos S_i a la suma del número de columna más el número de fila de la casilla en la que se encuentra. Por ejemplo, $S_1 = 2$, pues está en la fila 1 y en la columna 1.

Cada vez que nos movemos a una casilla vecina, el número de columna o el número de fila se mantiene igual, y el otro aumenta o disminuye en 1. Por ejemplo, si estamos en la columna 1, fila 1, y nos movemos a la casilla vecina de la fila de abajo, estaríamos en la columna 1, fila 2. Eso quiere decir que si S_i es par, S_{i+1} será impar. En particular, dado que S_1 es par, S_i será par si i es impar, y S_i será impar si i es par.

2020 es un número par, por lo que S_{2020} debe de ser impar. Sin embargo, en la esquina inferior izquierda tenemos que el número de fila más el numero de columna es igual a $50 + 50 = 100$, un número par. En conclusión, es imposible colocar el número 2020 en una casilla cuya suma de número de fila y columna sea par, y, en particular, es imposible colocarlo en la casilla inferior izquierda.

Problema 1

Determinar la cantidad de números de tres cifras que cumplen las dos condiciones siguientes.

a. Cada una de sus cifras es un primo.

b. El número es divisible por alguna de sus cifras.

Solución.

Las cifras decimales que son números primos son: 2, 3, 5 y 7. Consideramos únicamente los números que usan esas cifras. Haremos el conteo por casos con base a la última cifra del número.

Caso 1: Números que terminan en 2 o 5. Utilizando los criterios de divisibilidad por 2 o 5 tenemos que estos números son divisibles por su última cifra. Dado que las primeras 2 cifras pueden ser cualquiera de los 4 números, tenemos que existen un total de $4 \times 4 \times 2 = 32$ posibilidades.

Caso 2: Números que terminan en 3 y son divisibles por 3. Usando el criterio de divisibilidad por 3 sabemos que la suma de las primeras dos cifras debe ser múltiplo de 3. Usando los números permitidos, las combinaciones que producen múltiplos de tres son: $3+3$, $2+7$ y $5+7$. Las cuales producen los números 333, 273, 723, 573, 753 para un total de 5 formas.

Caso 3: Números que terminan en 3 y son divisibles por 7. En este caso, 7 debe aparecer entre las cifras, así que solo existen las posibilidades 273, 373, 573, 723, 733, 753, 773. Revisando las opciones, obtenemos que solo 273 es divisible por 7, pero ese número ya fue considerado arriba.

Caso 4: Números que terminan en 7 y son divisibles por 3. En este caso, 3 debe aparecer entre las cifras. Usando el criterio de divisibilidad por 3 sabemos que la suma de las primeras dos cifras debe dejar residuo 2 al dividir por 3. Por lo tanto, las combinaciones que cumplen son: $2+3$, $5+3$, las cuales producen los números 237, 327, 357, 537 para un total de 4 formas.

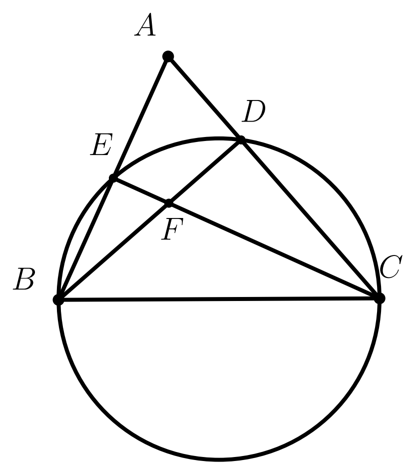
Caso 5: Números que terminan en 7 y son divisibles por 7. En este caso solamente es necesario verificar que el número formado por las primeras dos cifras es múltiplo de 7. Revisando la tabla del 7 tenemos que solamente hay dos posibilidades: 35 y 77, las cuales producen 357 y 777. De los anteriores, solamente el número 777 no ha sido considerado anteriormente.

Al final tenemos un total de $32 + 5 + 4 + 1 = 42$ números.

Problema 2

Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $AC = BC$ y $\angle ACB = 40°$. Se construye la circunferencia con diámetro $\overline{BC}$ y sean D y E los puntos de intersección de dicha circunferencia con los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sea F la intersección de las diagonales del cuadrilátero $BCDE$. Determinar la medida del ángulo $\angle EFD$.

Solución.



Los ángulos $\angle BEC$ y $\angle BDC$ son rectos porque están inscritos en un semicírculo. Además, el ángulo $\angle BAC = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$ ya que el $\triangle ABC$ es isósceles. Por suma de ángulos en el cuadrilátero $AEFD$, tenemos que $\angle EAD + \angle AEF + \angle ADF + \angle EFD = 70° + 90° + 90° + \angle EFD = 360°$. Por lo cual $\angle EFD = 110°$.

Problema 3

Cinco personas están en una reunión y cada uno es honesto o mentiroso. Inician la conversación de la siguiente manera:

Alicia: “Si Bernardo es honesto, entonces yo soy mentirosa.”

Bernardo: “Si hay más de 2 honestos entre nosotros, entonces uno de ellos es Carmen.”

Carmen: “Entre Alicia y Denis hay al menos un mentiroso.”

Denis: “Bernardo y Carmen son ambos mentirosos o ambos honestos.”

Esmeralda: “Bernardo es honesto o es mentiroso.”

Determinar la mayor cantidad de honestos que pueden haber en la reunión.

Solución.

Notemos de entrada que la expresión de Esmeralda siempre es cierta, así que ella es honesta. Por otra parte, Alicia puede ser honesta o mentirosa. Analizamos ambos casos.

Alicia es mentirosa. En este caso debe ser cierto que Bernardo es honesto y que ella no es mentirosa. Pero esto es una contradicción. Por lo cual este caso *no es posible*.

Alicia es honesta. Entonces Bernardo debe ser mentiroso para que lo que Alicia expresa sea cierto. Como Bernardo es mentiroso, debe de haber más de 2 honestos y Carmen es mentirosa. Dado que

Carmen miente, concluimos que Alicia y Denis deben ser ambos honestos. Con esto tenemos que Alicia, Denis y Esmeralda son honestos, mientras que Bernardo y Carmen mienten. Podemos comprobar que está asignación de honestos y mentirosos verifica que Alicia, Denis y Esmeralda dicen la verdad, mientras que Bernardo y Carmen mienten. Así que hay un máximo de tres honestos.

Problema 4

Una caja contiene bolitas de los siguientes colores: azul, rojo, verde y blanco. La mitad del total de bolitas que no son rojas, son blancas; un tercio del total de bolitas que no son blancas, son azules y un quinto del total de bolitas que no son verdes, son rojas. Determinar todas las posibles cantidades de bolitas que hay en la caja si se sabe que son menos de 2020.

Solución.

Llamamos A, R, V y B al número de bolitas Azules, Rojas, Verdes y Blancas, respectivamente. Además, llamamos T a la suma de todas las bolitas. Con base a las condiciones establecidas, tenemos:

$$T - R = 2B \tag{1}$$
$$T - B = 3A \tag{2}$$
$$T - V = 5R \tag{3}$$

Si sumamos todas la ecuaciones, obtenemos que $3T = 6R+3B+V+3A$, además $T = A+B+R+V$. Combinando ambos resultados concluimos que $3R - 2V = 0$, así que $V = \frac{3R}{2}$. Sustituyendo en (3), tenemos que $T = \frac{13R}{2}$. Como T es entero, sabemos que 2 divide a R y además, T es múltiplo de 13. Por otra parte, $T = R + 2B$ y R es par, así que T es par. Por lo tanto, T *debe ser múltiplo de* 26.

Ahora, asumamos que $T = 26k$ con k entero positivo. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos que $R = 4k$, $B = 11k$, $A = 5k$ y $V = 6k$. Fácilmente se verifica que esas cantidades de bolitas cumplen con las condiciones del problema. Así que es necesario y suficiente que la cantidad de bolitas sea múltiplo entero positivo de 26.

Entonces las posibles cantidades de bolitas que hay en la caja son todos los múltiplos enteros positivos de 26 menores de 2020, los cuales son $\lfloor \frac{2020}{26} \rfloor = 77$.

Problema 5

Encontrar todos los pares de números (x, y) que son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$x + 1 = y^2 + xy$$
$$y + 1 = x^2 - xy.$$

Solución.

La primera ecuación se puede escribir como $x - xy = y^2 - 1$, factorizando obtenemos

$$x(1 - y) = (y + 1)(y - 1).$$

Lo cual implica que

$$(y - 1)(x + y + 1) = 0.$$

Por lo cual, alguno de los siguientes dos casos debe cumplirse.

Caso 1. $y-1=0$, es decir $y=1$. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $x^2-x-2=0$ que tiene soluciones $x=-1,2$. Por lo cual obtenemos las soluciones $(-1,1)$ y $(2,1)$.

Caso 2. $x+y+1=0$, es decir $y=-x-1$. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $-x=x^2-x(-1-x)$ que es equivalente a $2x^2+2x=2x(x+1)=0$. Por lo tanto, $x=0,-1$, los cuales corresponden a las soluciones $(0,-1)$ y $(-1,0)$.

Se puede verificar que las parejas encontradas satisfacen el sistema de ecuaciones, por lo cual las siguientes son todas las soluciones del sistema:

$$(x,y)=(-1,1),(2,1),(0,-1),(-1,0).$$

XX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Primer año de bachillerato

Problema 1

Se llena la siguiente pirámide infinita con los números impares de la siguiente forma:

		1		
	3		5	
	7	9	11	
13	15	17	19	
$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Determinar a partir de qué nivel la suma de todos los números que aparecen en dicho nivel y anteriores niveles es mayor a 2020 (El nivel 3 contiene a 7, 9 y 11).

Solución.

Notamos que hasta el nivel n han aparecido los $1+2+3+\cdots+n = (\frac{n(n+1)}{2})$ primeros números impares. Por lo que ahora resta calcular la suma de ellos. Notamos que la suma de los primeros k impares es k^2. Para demostrar esto definimos $S = 1+3+5+\cdots+(2k-1)$, entonces $2S = 2k+2k+\cdots+2k = 2k^2$, por lo que $S = k^2$. Así que la suma de los primeros $\frac{n(n+1)}{2}$ impares es $(\frac{n(n+1)}{2})^2$. Por lo que necesitamos el primer natural n tal que $(\frac{n(n+1)}{2})^2 > 2020$. Como $(\frac{8(9)}{2})^2 < 2020 < (\frac{9(10)}{2})^2$. Por lo que el nivel tal que la suma de los números que aparecen en dicho nivel y niveles anteriores es mayor que 2020 es el 9.

Solución 2.

Notamos que la suma de los primeros k impares es k^2. Para demostrar esto definimos $S = 1+3+5+\cdots+(2k-1)$, entonces $2S = 2k+2k+\cdots+2k = 2k^2$, por lo que $S = k^2$. Ahora encontramos el primer entero n tal que la suma de los primeros n impares sea mayor a 2020(Es decir $n^2 > 2020$). Que es 45. Por lo tanto el nivel en el que aparezca $2(45)-1 = 89$ será el primer nivel tal que la suma de los números que aparecen en dicho nivel y niveles anteriores es mayor que 2020. Por lo que solo resta encontrar en qué nivel aparece el número 89. Notamos que el último número del nivel k es $2(1+2+\cdots k)-1 = k^2+k-1$. Por lo que el nivel 9 tiene a los impares entre $8^2+8-1+2 = 73$ y $9^2+9+1 = 89$. Entonces 89 aparece en el nivel 9. Por lo que el nivel que buscamos es el noveno.

Problema 2

Se consideran los números de la siguiente forma

$$x_n = \overline{abaabaaab\cdots b\underbrace{a\cdots a}_{n \text{ veces}}b}$$

donde a y b son dígitos. Determinar para cuántos enteros n con $1 \leq n \leq 2020$, x_n es divisible por 11 sin importar los valores de a y b.

Solución.

El criterio de divisibilidad por 11 dice que un entero es múltiplo de 11 si y solo si la suma con signos alternados de los dígitos del número da un múltiplo de 11. Notamos que si hay un numero par de dígitos iguales consecutivos podemos eliminarlos y el número resultante tiene la misma suma alternada, por lo que el original es divisible por 11 si y solo si el resultante también lo es. Ejemplo $\overline{abaab} \to \overline{abb}$. Si hay una cantidad impar de dígitos iguales consecutivos pueden sustituirse todos por uno solo de ellos y la suma alternada total no cambiará. Ejemplo $\overline{abaabaaab} \to \overline{abaabab}$. Aplicando estas observaciones repetidas veces a los grupos de a de $\overline{abaabaaab} \cdots \overline{b} \overbrace{\overline{a \cdots a}}^{n \text{ veces}} \overline{b}$ obtenemos algo de la forma $\overline{abbabba \cdots abbab}$ o $\overline{abbabba \cdots abbabb}$ dependiendo de la paridad de n. Ahora, tomamos casos:

- $n = 4k+1$: Hay $2k+1$ dígitos a en $\overline{abbabba \cdots abbab}$ por lo que eliminando los b que están juntos obtenemos $\overbrace{\overline{a \cdots a}}^{2k+1\ a\text{'s}} \overline{b}$ que es equivalente a $\overline{ab}$.
- $n = 4k+2$: Hay $2k+1$ dígitos a en $\overline{abbabba \cdots abbabb}$ por lo que eliminando los b que están juntos obtenemos $\overbrace{\overline{a \cdots a}}^{2k+1\ a\text{'s}}$ que es equivalente a $\overline{a}$.
- $n = 4k+3$: Hay $2k+2$ dígitos a en $\overline{abbabba \cdots abbab}$ por lo que eliminando los b que están juntos obtenemos $\overbrace{\overline{a \cdots a}}^{2k+2\ a\text{'s}} \overline{b}$ que es equivalente a $\overline{b}$.
- $n = 4k$: Hay $2k$ dígitos a en $\overline{abbabba \cdots abbabb}$ por lo que eliminando los b que están juntos excepto los últimos 2 obtenemos $\overbrace{\overline{a \cdots a}}^{2k\ a\text{'s}} \overline{bb}$ que es equivalente a $\overline{bb}$.

Pero de entre $\overline{ab}, \overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{bb}$ solo $\overline{bb}$ es siempre divisible por 11. Así que solo para los n múltiplos de 4 el x_n siempre es divisible por 11 sin importar los valores de a y b. Así que la cantidad de x_n con $1 \leq n \leq 2020$ para los que se cumple la condición del problema es $\frac{2020}{4} = 505$.

Solución 2.

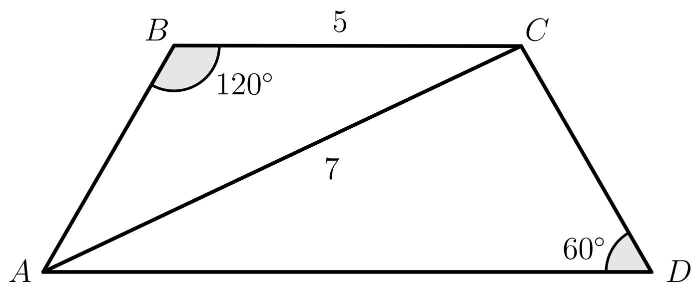
Para esta solución también utilizaremos la propiedad de eliminación de dígitos iguales presentada en la solución anterior. Notamos que para pasar de x_{n-1} a x_n solo se agrega $\overbrace{\overline{a \cdots a}}^{n \text{ veces}} \overline{b}$ al final de x_{n-1}. Que es equivalente a $\overline{ab}$ si n es impar y a $\overline{b}$ si n es par. Por lo que $11|x_1 \Leftrightarrow 11|\overline{ab}$, $11|x_2 \Leftrightarrow 11|\overline{a}$, $11|x_3 \Leftrightarrow 11|\overline{b}$, $11|x_4 \Leftrightarrow 11|\overline{bb}$, $11|x_5 \Leftrightarrow 11|\overline{ab}$. Notamos que para pasar de x_5 a x_6 debemos añadir $\overline{ab}$ al final de x_5, exactamente el mismo procedimiento que para pasar de x_1 a x_2, por lo que se forma un ciclo de longitud 4. Por lo que

- Si $n = 4k+1$, $11|x_n \Leftrightarrow 11|\overline{ab}$
- Si $n = 4k+2$, $11|x_n \Leftrightarrow 11|\overline{a}$
- Si $n = 4k+3$, $11|x_n \Leftrightarrow 11|\overline{b}$
- Si $n = 4k$, $11|x_n \Leftrightarrow 11|\overline{bb}$

Pero de entre $\overline{ab}, \overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{bb}$ solo $\overline{bb}$ es siempre divisible por 11. Así que solo para los n múltiplos de 4 el x_n siempre es divisible por 11 sin importar los valores de a y b. Así que la cantidad de x_n con $1 \leq n \leq 2020$ para los que se cumple la condición del problema es $\frac{2020}{4} = 505$.

Problema 3

En la siguiente figura los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos. Calcular la longitud del segmento $\overline{AD}$.



Solución.

Denotaremos AD por x. Sean X, Y las intersecciones de las perpendiculares a AD que pasan por B y C con AD, respectivamente. Por lo que $\frac{x-5}{2} = AX = DY$. Notamos que ABX es un triangulo notable de $30-60-90$, por lo que $\frac{\sqrt{3}}{2}(x-5) = BX = CY$. Ahora planteando el teorema de Pitágoras en el triángulo ACY tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-5)\right)^2 + \left(\frac{x+5}{2}\right)^2 = 49$$

De donde obtenemos $x^2 - 5x - 24 = 0$ por lo que $(x+3)(x-8) = 0$. Entonces $x = -3$ o $x = 8$, pero x es una distancia así que $x = 8$.

Solución 2.

Planteamos el teorema del coseno para el triángulo ABC y obtenemos

$$5^2 + BA^2 - 2 \cdot 5 \cdot BA \cdot \cos(120°) = 7^2$$

Esta es una ecuación cuadrática con incógnita BA cuyas únicas soluciones son $BA = -8$ y $BA = 3$, pero como BA es una longitud, solo $BA = 3$ es posible. Como $ABCD$ es un trapecio isósceles $BA = CD = 3$. Ahora planteamos nuevamente el teorema del coseno para el triángulo CDA y obtenemos

$$3^2 + AD^2 - 2 \cdot 3 \cdot AD \cdot \cos(60°) = 7^2$$

Esta es una ecuación cuadrática con incógnita AD cuyas únicas soluciones son $AD = -5$ y $AD = 8$. Pero, como AD es una longitud de un segmento, debe ser positiva. Por lo tanto $AD = 8$

Problema 4

Determinar si existen números reales x, y, z distintos de 0, tales que, los números a, b, c definidos por $a = \frac{y-z}{x}, b = \frac{z-x}{y}, c = \frac{x-y}{z}$ cumplen la siguiente igualdad:

$$(a+b+c)^2 = 2abc - 1.$$

Solución.

Notamos que $a + b + c = \frac{x^2y - xy^2 - x^2z + y^2z + xz^2 - yz^2}{xyz} = -abc$. Por lo que la ecuación en cuestión se transforma en $(-abc)^2 = 2abc - 1$. Haciendo $x = abc$ obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 1 = 0$ que tiene como única solución $x = 1$. Por lo que necesitamos es encontrar reales x, y, z tales que $abc = 1$. Lo que es equivalente a $(x-y)(y-z)(z-x) = xyz$. Para simplificar la ecuación hacemos

$z = 1$ lo que nos da como resultado la siguiente ecuación $x^2 - y^2 + y - x + xy^2 - yx^2 = xy$ que es equivalente a:

$$x^2(1-y) + x(y^2 - y - 1) - y^2 + y = 0.$$

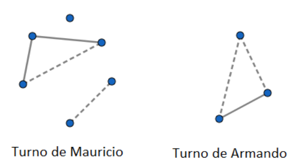
que tiene como discriminante $y^4 - 6y^3 + 7y^2 - 2y + 1$ que será eventualmente positivo (por ejemplo $y = 5$ da discriminante 41) así que existen x, y, z distintos de 0 tales que $abc = 1$ y por lo tanto tales que $(a+b+c)^2 = 2abc - 1$.

Problema 5

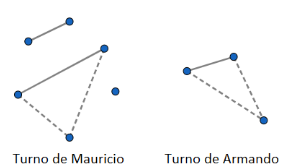
Armando y Mauricio juegan al Schwarz. El Schwarz es un juego por turnos que se juega sobre una página de papel marcada con 202020 puntos colocados de manera arbitraria tales que no hay 3 alineados. En cada turno el jugador debe seleccionar dos pares de puntos que no hayan sido unidos previamente y unir cada uno de ellos con un segmento de recta, si se forma un triángulo, al final del turno, se eliminan los puntos que lo conforman y los segmentos de recta conectados a estos puntos y se continua con el turno del otro jugador. Si en un turno solo es posible unir un par de puntos, estos deben unirse. El perdedor es quien elimina los últimos tres puntos. Si inicia Armando, determinar quién tiene la estrategia ganadora. **Solución.**

Primero demostraremos que Mauricio siempre gana si solo hay 6 puntos. Como Armando inicia, tiene dos opciones, hacer que sus segmentos compartan o no compartan un vértice en común.

- **Ambos segmentos comparten un vértice:** Mauricio coloca un segmento para completar el triángulo y el otro uniendo dos de los puntos que aun no hemos usado. Así en el siguiente turno, Armando debe colocar dos segmentos, pero solo hay dos segmentos que aun no han sido trazados, por lo que Armando completa el triángulo y pierde.



- **Los segmentos no comparten un vértice:** Mauricio toma un punto que aun no haya sido usado y traza los segmentos que unen este punto con los vértices de uno de los dos segmentos que Armando dibujó antes. Esto crea un triángulo y hacen que se eliminen tres vértices y los segmentos que salen de ellos. Por lo que lo que queda son tres puntos y un segmento de los tres posibles dibujado. Así en el siguiente turno Armando deberá completar el triángulo y perder.



Ahora demostraremos por inducción que si el juego inicia con cualquier cantidad de puntos de la forma $3n$ con $n \geq 2$, si Armando comienza, Mauricio tiene la estrategia ganadora. El caso base ya fue demostrado. Asumimos que para $3k$ es cierto. Ahora si tenemos $3(k+1)$. Como Armando inicia, tiene dos opciones, hacer que sus segmentos compartan o no compartan un vértice en común.

- **Ambos segmentos comparten un vértice:** En este caso Mauricio completa el triángulo entre estos segmentos y traza el otro segmento utilizando uno de los vértices del triángulo y un punto aun no utilizado. De esta forma el triangulo y los segmentos conectados a él(Incluyendo el último que Mauricio trazó) se eliminan. De esta manera volvemos al caso anterior con $3k$ puntos. Y ya sabemos que en este Mauricio gana.

- **Los segmentos no comparten un vértice:** En este caso Mauricio toma un segmento de los que trazó Armando y une sus vértices a uno de los vértices del otro segmento dibujado por Armando. Creando así un triángulo. Luego de esto se borran los puntos del triangulo, sus segmentos y el segmento que Armando dibujó y esta conectado al triángulo. Dejando así $3k$ puntos sin segmentos trazados, es decir, el caso anterior. Pero ya sabemos que Mauricio gana en ese caso.

Por lo tanto para cualquier juego con $3n$ puntos y $n \geq 2$, Mauricio gana. Así que con 202020 puntos en un inicio, Mauricio gana.