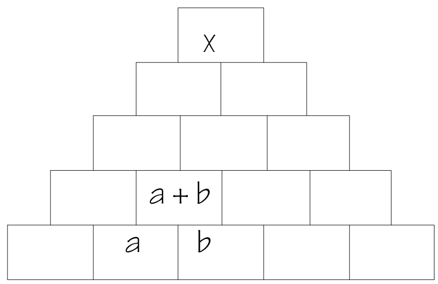
TERCERA OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS EL SALVADOR 2003

PRUEBA DEL PERIÓDICO

PRIMER NIVEL

PROBLEMA 1

Se escribe cada uno de los números 1, 2, 3, 4 y 5 en una de las casillas de la base de una pirámide. En cada una de las casillas superiores se coloca la suma de los dos números en las casillas que *la sostienen*, tal como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un sólo número x en la casilla superior. (Este número es diferente para diferentes distribuciones de los números de la base) ¿Cuál es el mayor valor que x puede tener?.



PROBLEMA 2

Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 forme un número de 6 cifras distintas *abcdef* tal que el número de tres cifras *abc* sea múltiplo de 4, el número tres cifras *bcd* sea múltiplo de 5, el número de tres cifras *cde* sea múltiplo de 3 y el número de tres cifras *def* sea múltiplo de 11.

PROBLEMA 3

Un juego tiene lugar en un tablero de 3 x 4 como el del diagrama, Alicia juega primero, turnándose con Beto. Una jugada consiste en tapar o bien un cuadro del tablero o bien dos cuadros con un lado común. El ganador es quien termine de tapar el tablero totalmente (quien puede hacer la última jugada). Se sabe que Alicia tiene una estrategia ganadora, es decir, Alicia puede ganar sin importar como juega Beto. ¿Cuál es la suma de los números de los cuadros que Alicia debe tapar en la primera jugada para asegurarse la victoria ?. ¿Cuál es la estrategia de Alicia?

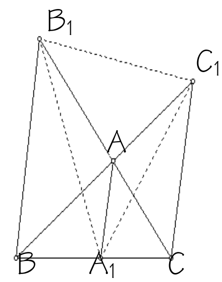
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

PROBLEMA 4

Encuentre el número natural que al dividirlo por 131 deja residuo 112 y al dividirlo por 32 deja residuo 98.

PROBLEMA 5

Sea ABC un triángulo escaleno de área 2003. Sea A_1 un punto del lado BC y sean B_1 y C_1 puntos sobre las prolongaciones de los lados AC y AB respectivamente, tales que AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelas. Encuentre el área del triángulo $A_1B_1C_1$.



SEGUNDO NIVEL

PROBLEMA 1

¿Cuál es el valor de $5 + 55 + 555 + \cdots + 55\cdots5$, donde el último sumando tiene 2003 dígitos?

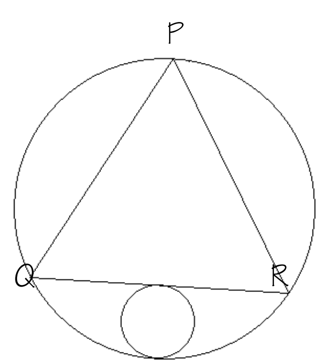
PROBLEMA 2

En el siguiente diagrama las columnas se enumeran de izquierda a derecha y los renglones se enumeran de arriba hacia abajo, por ejemplo, el número 12 se encuentra en el tercer renglón y cuarta columna. ¿En que posición se encontrará el número 2003 ?

1 →	2	9 →	10	25 →	26
	↓	↑	↓	↑	↓
4 ←	3	8	11	24	⋮
↓		↑	↓	↑	
5 →	6 →	7	12	23	
			↓	↑	
16 ←	15 ←	14 ←	13	22	
↓				↑	
17 →	18 →	19 →	20 →	21	

PROBLEMA 3

En una circunferencia de radio 6 cm. inscribimos el triángulo isósceles *PQR* en el que *PQ = PR.* Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base *QR* del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de *PQ* es $4\sqrt{5}$. ¿Cuál es el radio de la circunferencia pequeña?



PROBLEMA 4

Sea ABC un triángulo cualquiera. Llamemos I al punto simétrico de B con relación a A, J al punto simétrico de C con relación a B y K al punto simétrico de A con relación a C. Exprese el área del triángulo IJK en términos del área del triángulo ABC.

PROBLEMA 5

Se tiene un tablero cuadrado cuadriculado de 5 x 5 y fichas rectangulares de 2 x 1, cada ficha cabe exactamente en dos casillas adyacentes del tablero. Las fichas se colocan en el tablero ocupando exactamente dos casillas adyacentes. El tablero está *dominado* cuando ya no hay espacio para colocar más fichas.

¿Cuál es el menor número de fichas que se debe colocar para dominar el tablero?.

TERCER NIVEL

PROBLEMA 1

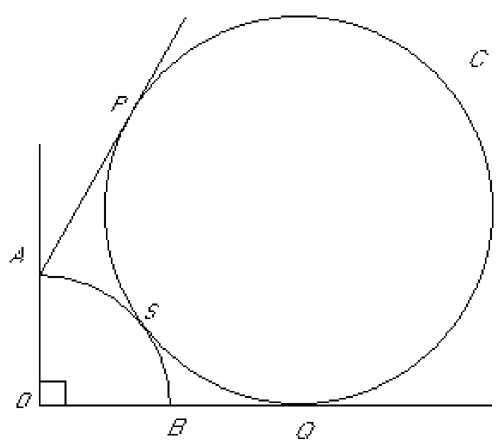
Determine el menor número natural que tiene la propiedad de que su cubo termina en 888.

PROBLEMA 2

El triángulo ABC es isósceles con $AC = BC$. La bisectriz del ángulo en A intercepta al lado BC en el punto D y la bisectriz del ángulo en C intercepta el lado AB en E. Si $AD = 2CE$, halle la medida de los ángulos del triángulo ABC.

PROBLEMA 3

En la figura adjunta, la circunferencia C es tangente al cuadrante AOB en el punto S. AP es tangente a C en P y OQ es tangente en Q. Calcule la longitud AP en función del radio R del cuadrante AOB.



PROBLEMA 4

Sea A un conjunto con siete o más números naturales. Demuestre que deben haber dos números en A con la propiedad de que o bien su suma o bien su diferencia es divisible por diez.
Demuestre que la propiedad puede fallar si el conjunto A posee menos de siete elementos.

PROBLEMA 5

Un polígono convexo de n lados es tal que no hay punto común alguno para cualesquiera tres de sus diagonales. Determine el número de triángulos que se forman de manera tal que dos de sus vértices sean vértices del polígono y el tercero sea una intersección de dos diagonales.