XI OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2011

Ministerio de Educación

GOBIERNO DE EL SALVADOR

UNIR, CRECER, INCLUIR

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XI OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

DE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2011 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado inferior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado inferior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica de que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente en los gráficos.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpíada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- **Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.**

PROCEDIMIENTO DE PARTICIPACIÓN EN LA DÉCIMA PRIMERA OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA:

El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del 14 al 21 de febrero y entregar las soluciones en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día martes 22 de febrero a las 3:00 p.m.

Las soluciones e información pertinentes deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, que contendrá en la carátula y en una página dentro del mismo todos los datos del estudiante. Este será revisado para determinar el total de problemas resueltos y será sellado y firmado por la persona responsable del MINED, quien entregará constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto.

LOS ESTUDIANTES DEBERÁN PRESENTAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Primer nombre, segundo nombre, primer apellido, segundo apellido, fecha de nacimiento: día, mes y año; grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono.

Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: nombre, modalidad (público, privado), dirección, teléfono, profesor responsable: dirección y teléfono.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial el día 12 de marzo del presente año**, en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador. Los concursantes clasificados serán notificados en su Centro Escolar y alternativamente podrán consultar los listados publicados en **www.mined.gob.sv** del Ministerio de Educación desde el día 7 de marzo de 2011. **Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**

Este mismo día se realizará una prueba psicológica, por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde las ocho y media de la mañana hasta las cuatro de la tarde.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador y el Center for the Advancement of Hispanics in Science and Engineering Education, con sede en Washington D.C.

La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en www.mined.gob.sv el día 21 de marzo de 2011.

La Academia Sabatina se inaugurará el sábado 26 de marzo e iniciará actividades académicas el sábado 2 de abril de 2011.

XI OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2011

CUARTO GRADO

Problema 1.

Observa la secuencia de figuras formadas con puntos. Dibuja la figura que sigue. ¿Cuántos puntos tiene la figura 669? Explica por qué.

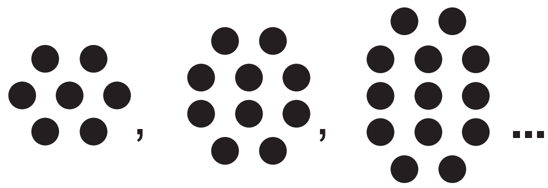
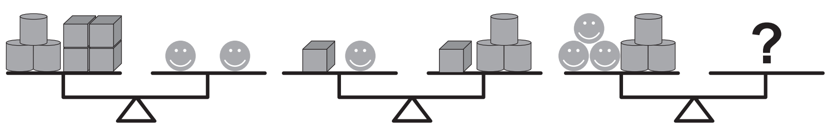


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

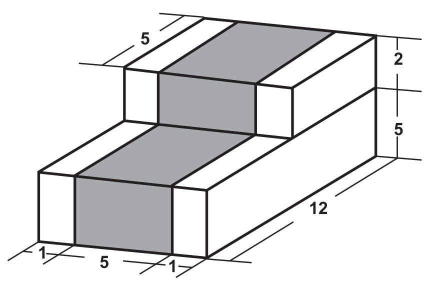
Problema 2.

Observa la secuencia de balanzas. ¿Cuántos cubos se necesitan para equilibrar la tercer balanza? Explica tu procedimiento realizado para obtener la respuesta.



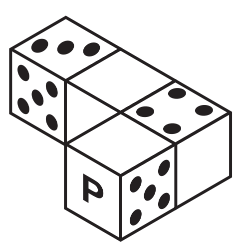
Problema 3.

Con cubos de lado 1 cm, algunos de ellos blancos y otros grises, se construyó un sólido. La figura siguiente muestra el sólido construido, al centro van los cubos grises mientras que los cubos blancos van en las orillas; sin embargo, ya no es posible distinguir los bordes de todos los cubos, sólo se dispone de cierta información que se detalla en la misma figura. Observa con cuidado la figura, los números mostrados son las medidas en centímetros de los bordes del sólido. A partir de esta información responde cuántos cubos blancos y cuántos cubos grises fueron utilizados.



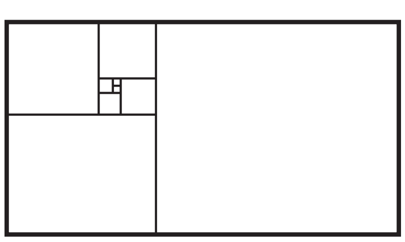
Problema 4.

En un dado corriente, las caras opuestas siempre suman 7. Por tanto, 2 y 5, 4 y 3, 6 y 1, están en caras opuestas. En la figura siguiente se muestran cuatro dados corrientes con cierta información oculta, pero se sabe que estos dados están ubicados de modo que las caras que se tocan suman 9. ¿Cuántos puntos tiene la cara marcada con la letra **P**?



Problema 5.

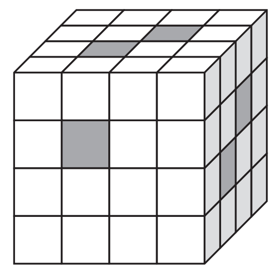
La siguiente figura está formada por 9 cuadrados. Una hormiga recorre el borde del cuadrado más pequeño en 4 segundos. Determina el tiempo que tarda la misma hormiga en recorrer el borde del rectángulo mayor. Explica cómo obtuviste la respuesta.



QUINTO GRADO

Problema 1.

La figura siguiente está formada por cubitos blancos y cubitos grises. Cada cubito gris está contenido en una fila entera de cubitos grises. ¿Cuántos cubitos grises hay en total?

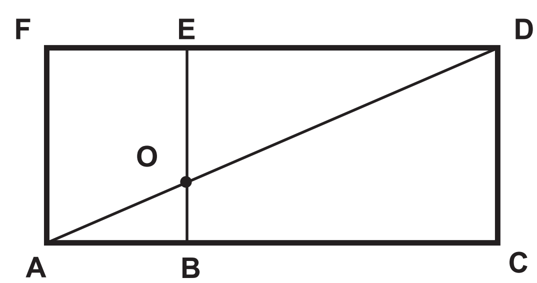


Problema 2.

Bruno, Diego y Fede fueron al supermercado. Bruno pagó con un billete de \$50 y recibió \$12 de vuelto. Diego y Fede pagaron con un billete de \$100 cada uno. Bruno y Fede gastaron \$80 entre los dos. El vuelto de Diego fue la mitad del vuelto de Fede. ¿Cuánto gastó Diego?

Problema 3.

En la figura siguiente, **ACDF, ABEF** y **BCDE** son rectángulos. Además, **AB=12cm, BC=24cm, CD=15cm, DO=26cm**, el cuadrilátero **BCDO** tiene **70cm** de perímetro, y el triángulo **ABO** tiene **30cm** de perímetro. ¿Cuál es el perímetro de **AOEF**?



Problema 4.

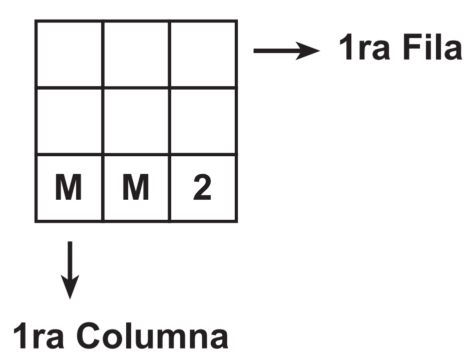
Renato tiene una lata vacía. Si la llena completamente con arena, todo pesa 870 gramos. Si llena con arena sólo tres cuartas partes de la lata, todo pesa 735 gramos. ¿Cuánto pesa la lata vacía?

Problema 5.

La cuadrícula siguiente se rellena con números enteros positivos de tal forma que:

- El producto de los números de la primera fila es 90.
- El producto de los números de la segunda fila es 8.
- El producto de los números de alguna columna es 9.
- El producto de los números de otra columna es 30.
- El producto de los números de la columna restante es 48.

¿Cuál es el valor de M?



XI OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2011

SEXTO GRADO

Problema 1.

En el pizarrón se encuentran escritas las siguientes seis fracciones:

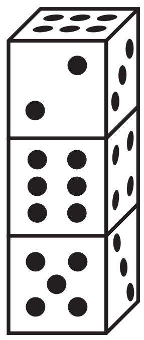
$$\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{8};\frac{1}{10};\frac{1}{12}$$

Juan borra dos de las fracciones y observa que la suma de las cuatro restantes es 1. ¿De cuántas maneras pudo Juan seleccionar las dos fracciones que borró?

Problema 2.

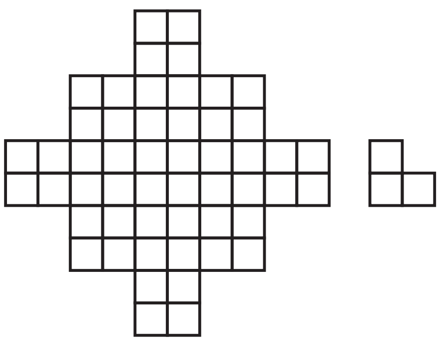
Ana diseña tres cubitos **EXACTAMENTE IGUALES:** En el primer cubito, dibuja 1 punto en una cara cualquiera, luego escoge otra cara para dibujar 2 puntos, luego escoge otra cara para dibujar 3 puntos, y así continúa hasta dibujar 6 puntos en la última cara; después, los otros dos cubitos los diseña de tal forma que quedan exactamente iguales al primero.

Finalmente, coloca a los tres cubitos uno sobre otro tal como muestra la siguiente figura. ¿Cuántos puntos están dibujados en la base?



Problema 3.

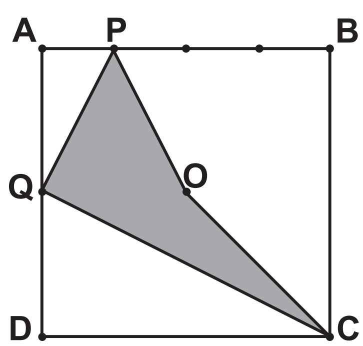
En la siguiente figura, la pieza mayor está formada por 52 cuadrados de lado 1, y la pieza menor está formada por 3 cuadrados de lado 1. ¿De cuántas maneras puede colocarse la pieza menor sobre la pieza mayor cubriendo exactamente 3 cuadrados de la pieza mayor?



Nota: La pieza menor puede girarse a conveniencia.

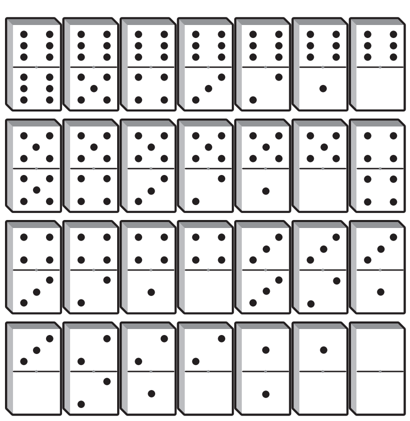
Problema 4.

La siguiente figura muestra un cuadrado **ABCD** de lado **1**. El lado **AB** ha sido dividido en cuatro partes iguales. El punto **Q** es el punto medio de **AD** y **O** es el centro del cuadrado. Encuentre el área sombreada.



Problema 5.

La figura muestra todas las piezas de dominó. Estas piezas son colocadas en una cadena de tal manera que, la cantidad de puntos en las casillas adyacentes de dos piezas consecutivos es la misma. Si en un extremo de la cadena aparecen 5 puntos, ¿cuántos puntos aparecerán en el otro extremo de la cadena?



SÉPTIMO GRADO

Problema 1.

Candy es una niña que le gusta multiplicar números. En esta ocasión, ella quiere multiplicar

$$10000\ldots0001 \times 11111\ldots1111$$

ambos números tienen 2011 cifras. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número que resulta de la multiplicación de Candy?

Problema 2.

Elsi trata de agrupar en parejas los números 72, 8, 24, 10, 5, 45, 36 y 15, de tal manera que los productos de los números de cada pareja sean todos iguales. ¿Es posible que Elsi haga esto? Si fuera posible, ¿Cuál sería la pareja de 36?

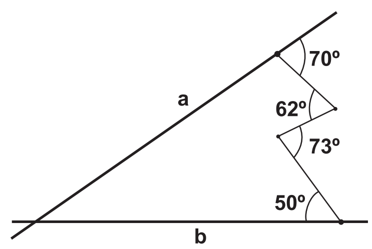
Problema 3.

En un pueblo muy lejano llamado Zalacate existen 3 tipos de niñas: las que usan collares con exactamente 6 diamantes, con exactamente 7 diamantes y con exactamente 8 diamantes. Las niñas de 6 y 8 diamantes siempre dicen la verdad, mientras que las de 7 siempre mienten. Un día se encuentran en el parque cuatro niñas, Taty, Ale, Lili y Gaby.

Taty dice a las demás: “Entre nosotras hay 28 diamantes por todos.”
Ale toma la palabra y dice: “No, entre nosotras hay 27.”
Lili las corrige diciendo: “No mientan, entre nosotras hay 26 diamantes”
Y finalmente Gaby dice: “Falso, todas están mintiendo, entre nosotras hay 25.” ¿Quién dijo la verdad?

Problema 4.

Encuentre el ángulo que forman las líneas rectas **a** y **b** en la figura.



Problema 5.

Hallar todos los números naturales de cuatro cifras, formados por dos dígitos pares y dos dígitos impares, que verifican lo siguiente:

- Al multiplicarlos por 2, se obtienen números de cuatro cifras con todos sus dígitos pares.
- Al dividirlos por 2, se obtienen números naturales de cuatro cifras con todos sus dígitos impares.

OCTAVO GRADO

Problema 1.

Sean **a, b, c** números reales tales que

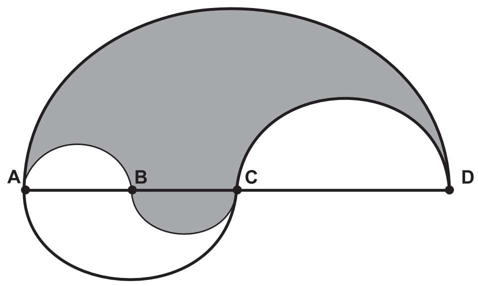
$$a \times b = 12$$
$$b \times c = 20$$
$$a \times c = 15$$

¿Cuánto vale **a x b x c**?

XI OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2011

Problema 2.

En la siguiente figura hay dos semicircunferencias de diámetro 2, dos semicircunferencias de diámetro 4, y una semicircunferencia de diámetro 8. Encuentre el área sombreada.



Problema 3.

Si se sigue construyendo el siguiente triángulo de números, ¿cuál será el último término del renglón 100?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
...

Problema 4.

Una profesora de matemática colocó en las indicaciones de un examen: "Utilicen lo visto en clase sobre Sumas de Gauss para resolver los problemas; por favor no utilicen la calculadora".
Sin embargo, Ramón hizo caso omiso de esa indicación y decidió utilizar la calculadora para resolver la siguiente suma

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 9999$$

Si Ramón es capaz de presionar 100 teclas por minuto y el examen duró 4 horas, ¿logró calcular la suma a tiempo?

Problema 5.

Un sabio llega a una isla donde sus habitantes se dividen en dos tipos: honestos y mentirosos; los habitantes honestos siempre dicen la verdad, mientras que los mentirosos siempre mienten. El sabio encuentra a una pareja, Eduardo y Ethel, y decide averiguar qué tipo de habitantes son. Para ello, el sabio le pregunta a Eduardo: "¿Ustedes dos son honestos?", la respuesta de Eduardo no le permite al sabio determinar sus identidades. Luego, el sabio le pregunta nuevamente a Eduardo: "¿Son ambos del mismo grupo?", y ahora la respuesta de Eduardo sí le permite al sabio identificarlos. ¿Qué tipo de habitantes son Eduardo y Ethel?

NOVENO GRADO

Problema 1.

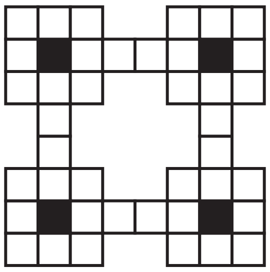
Sean **a, b, c** números reales que tales que

$$a + b + c = 0$$
$$abc = 0$$

¿Qué valores puede tomar $a^7 + b^7 + c^7$?

Problema 2.

¿Cuántas formas hay de cubrir todos los cuadritos blancos de la figura siguiente con piezas rectangulares de tamaño **2x1** sin que se traslapen y sin que se salgan del tablero?

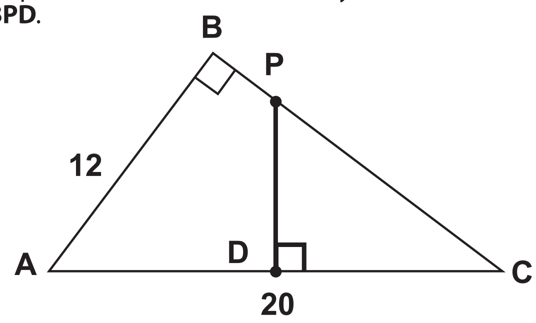


Problema 3.

Dados cinco números naturales consecutivos en orden creciente $a < b < c < d < e$ tales que $a + b + c + d + e$ es un cubo perfecto y $b + c + d$ es un cuadrado perfecto, halle el valor mínimo de **c**.

Problema 4.

En la siguiente figura, **D** es el punto medio de **AC, AB = 12** y **AC = 20**. Calcule el área del cuadrilátero **ABPD**.



Problema 5.

En una cuadrícula de **3x3** se acomodan los dígitos del 1 al 9 sin repetir. Considere cada renglón como un número de 3 cifras y llámale **A** a la suma de estos tres números. Luego, considere cada columna como un número de 3 cifras y llámale **B** a la suma de estos tres números. ¿Es posible acomodar los dígitos en la cuadrícula de **3x3** de tal forma que **A + B = 2011**?

PRIMER AÑO DE BACHILLERATO

Problema 1.

En el mes de enero de cierto año hubo exactamente cuatro días lunes y cuatro días viernes. ¿Qué día de la semana fue 1 de febrero?

Problema 2.

Determine todos los enteros positivos **n** que poseen la siguiente propiedad: "Entre los divisores positivos de **n** diferentes de 1 y diferentes de **n**, el mayor es 35 veces el menor".

Problema 3.

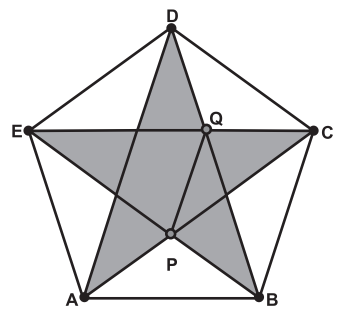
La isla Vecindad tiene 2011 habitantes, divididos en tres tipos: los inocentes, los malvados y los caprichosos; los inocentes siempre dicen la verdad, los malvados siempre mienten, y los caprichosos dicen alternadamente mentiras un día y verdades al día siguiente. Un reportero visita a la isla por dos días.
El primer día, el reportero entrevista a todos los habitantes:
- El primero le dice: "Hay exactamente un malvado en la isla".
- El segundo le dice: "Hay exactamente dos malvados en la isla".
- Y así sucesivamente hasta llegar al habitante número 2011, que le dice: "Hay exactamente 2011 malvados en la isla".

El segundo día, el reportero vuelve a entrevistarlos a todos en el mismo orden:
- El primero le dice: "Hay exactamente un inocente en la isla".
- El segundo le dice: "Hay exactamente dos inocentes en la isla".
- Y así sucesivamente hasta llegar al habitante número 2011, que le dice: "Hay exactamente 2011 inocentes en la isla".

¿Cuántos caprichosos hay en la isla?

Problema 4.

Sea **ABCDE** un pentágono regular tal que la estrella **ACEBD** tiene área 1. Sea **P** el punto de intersección de **AC** y **BE**, sea **Q** el punto de intersección de **BD** y **CE**. Determine el área del cuadrilátero **APQD**.



Problema 5.

Determine todos los enteros positivos **a,b,c,d** con **a<b<c<d**, tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ es un entero.}$$