



XIX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA  
PRUEBA PRESENCIAL - PRIMER AÑO DE BACHILLERATO  
9 DE MARZO DE 2019

— PARTE I: Las siguientes diez preguntas únicamente requieren la respuesta. —

**Pregunta 1** \_\_\_\_\_

Un número  $x$  satisface la ecuación  $x = \frac{1}{1+x}$ . ¿Cuánto vale  $x - \frac{1}{x}$ ?  a -1  b 0  c 1  
 d 2  e No se puede

**Pregunta 2** \_\_\_\_\_

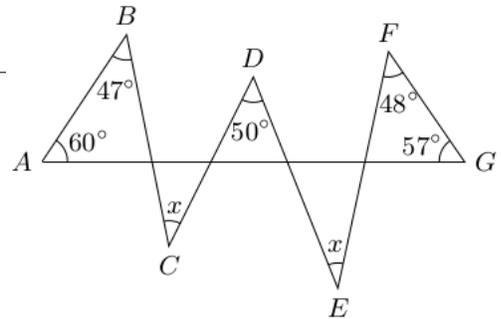
Suponga que el número real  $x$  satisface  $\sqrt{49 - x^2} - \sqrt{25 - x^2} = 3$ . ¿Cuánto vale  $\sqrt{49 - x^2} + \sqrt{25 - x^2}$ ?

- a 8                       b  $\sqrt{33} + 8$                        c 9                       d  $2\sqrt{10} + 4$                        e 12

**Pregunta 3** \_\_\_\_\_

En la figura, ¿cuánto mide el ángulo  $x$ ?

- a  $37^\circ$                        b  $38^\circ$                        c  $39^\circ$                        d  $40^\circ$                        e  $41^\circ$



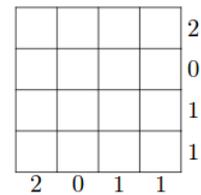
**Pregunta 4** \_\_\_\_\_

Una caja contiene 28 bolas rojas, 20 verdes, 19 amarillas, 13 azules, 11 blancas y 9 negras. ¿Cuál es el mínimo de bolas que deben extraerse (sin devolverlas a la caja) para garantizar que habrá al menos 15 bolas del mismo color?

- a 75                       b 76                       c 79                       d 84                       e 91

**Pregunta 5** \_\_\_\_\_

En un tablero de  $4 \times 4$ , se pinta cada casilla de blanco o negro. En la figura, el número a la par de cada fila/columna indica el número de cuadrados negros en la misma. ¿De cuántas formas se puede pintar el tablero?



- a 0                       b 1                       c 4                       d 5                       e 8

**Pregunta 6** \_\_\_\_\_

¿Cuál es el dígito de las centenas del número mostrado?

$$(1!)^2 + (2!)^2 + (3!)^2 + \dots + (2018!)^2 + (2019!)^2$$

Nota:  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  es el factorial de  $n$ .

- a 0                       b 1                       c 2                       d 3                       e 4

### Pregunta 7

Se escriben cinco enteros alrededor de un círculo. Se sabe que la suma de dos números vecinos nunca es múltiplo de 3, y además la suma de tres números vecinos nunca es múltiplo de 3. ¿Cuántos de los cinco enteros son múltiplos de 3?

- a) 1                       b) 2                       c) 3                       d) 4                       e) Hay más de una posibilidad

### Pregunta 8

Un hexágono regular y un triángulo equilátero tienen igual perímetro. La razón entre sus áreas es:

- a) 2 : 3                       b) 1 : 1                       c) 4 : 3                       d) 3 : 2                       e) 2 : 1

### Pregunta 9

Cinco números  $a, b, c, d, e$  satisfacen

$$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5. \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{a}} \ a \\ \boxed{\text{d}} \ d \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{b}} \ b \\ \boxed{\text{e}} \ e \end{array} \quad \boxed{\text{c}} \ c$$

¿Cuál de ellos es el mayor?

### Pregunta 10

La sucesión de Fibonacci se define como  $F_1 = F_2 = 1$  y  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para  $n \geq 3$ . ¿Cuántos números pares hay en la lista

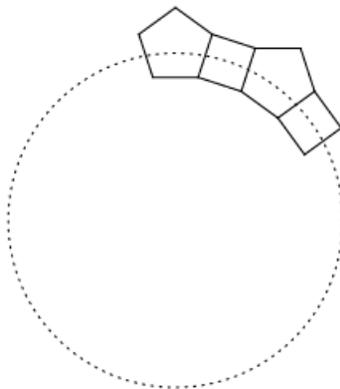
$$F_1, F_2, \dots, F_{100}?$$

- a) 30                       b) 31                       c) 32                       d) 33                       e) Ninguno

— **PARTE II:** *Los siguientes dos problemas requieren soluciones con justificaciones completas.* —

### Problema 1

Rodrigo comienza a hacer una cadena con pentágonos regulares y cuadrados del mismo lado. Si continúa el patrón mostrado, ¿cerrará la cadena? De ser así, ¿cuántos pentágonos son necesarios?



### Problema 2

Un entero positivo mayor que 10 es *excelente* si sus dígitos se pueden dividir en dos grupos, de modo que la suma de los dígitos en un grupo sea igual a la suma de los dígitos en el otro. Por ejemplo, 3454 es excelente, pues  $3 + 5 = 4 + 4$ ; y 29403 también, pues  $9 + 0 = 2 + 3 + 4$ . Determinar el menor valor de  $N$  tal que tanto  $N$  como  $N + 1$  son excelentes.