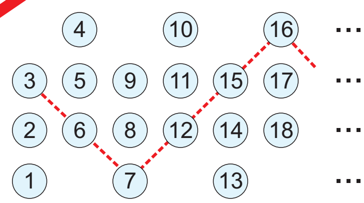
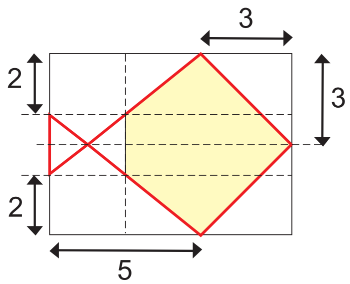
XVII Olimpiada Nacional de MATEMÁTICA 2017

OCTAVO GRADO

Problema 1

Dorothy camina en diagonal iniciando en la primera columna por el número 3, como lo muestra la figura. Determinar el número en el que Dorothy estará parada en la columna 2017.



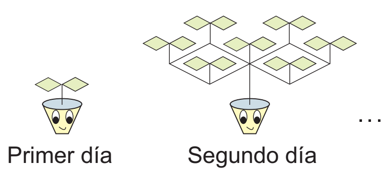


Problema 2

En un trozo de papel rectangular de dimensiones 8 x 6 se trazan unas líneas punteadas paralelas a los lados del rectángulo, como muestra la figura anterior. Utilizar la información mostrada para calcular el área sombreada.

Problema 3

En el país *A* viven tres grupos de personas: agricultores, bomberos y comerciantes, en el país *B* viven dos grupos de personas: deportistas y escritores. En una conferencia se reúnen personas de ambos países de tal forma que cada grupo de cada país tiene al menos un representante, y el número total de personas en la conferencia es múltiplo de 5 y no mayor a 50. En cada país los asistentes de uno de los grupos duplican al número de asistentes de otro grupo del mismo país. En ambos países hay dos grupos cuya diferencia de asistentes es 2 y cada grupo del país *A* tiene más de 3 miembros. Determinar el número de asistentes a la conferencia.



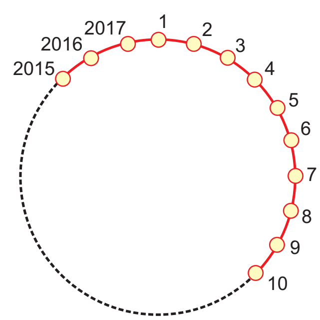
Problema 4

Máterbol es una especie mística de Pokémon. Estando fuera o dentro de la pokébola, cada día crece y retoña misteriosamente: un retoño (primer día) crece y en cada nudo le crece un nuevo retoño (el segundo día tiene 7 retoños), el tercer día tendrá 49 retoños y así sucesivamente. Cierto día, Ash peleando contra el equipo Rocket elige cuatro Máterbol, que en total tienen 41179600 retoños. Determinar los días de vida que tiene cada Máterbol.

Problema 5

"1 y 7 en 2017" es un juego con dos participantes *A* y *B*. Se numeran 2017 casillas en forma circular, como muestra la figura. El juego consiste en pintar alternadamente casillas en sentido horario separadas a distancia 1 y 7 (cada casilla puede ser pintada más de una vez). El jugador que gana es el que pinta primero la casilla 2017 luego de que todas las demás hayan sido pintadas al menos una vez. El jugador *B* escoge su cantidad de casillas que avanzará (1 o 7) y el jugador *A* sabiendo la elección del jugador *B* es el que comienza el juego escogiendo y pintando la casilla donde iniciar. Determinar una estrategia ganadora para el jugador *A*.

Nota: *Por ejemplo las casillas 2, 9 y 10 están a distancias 7 y 1 respectivamente.*



NOVENO GRADO

Problema 1

Una cuadrícula de 23 x 23 quiere cubrirse completamente utilizando cuadrados de lados 1, 2 y 3, sin traslaparse.

a) Muestre que es posible lograrlo si se dispone solo de cuatro cuadrados de lado 1.

b) Determinar si es posible lograrlo al disponer solo de un cuadrado de lado 1.

Problema 2

Sean a y b números reales positivos tales que $2a^2+2b^2=5ab$.

Calcular $\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

Problema 3

Se desea llenar una caja rectangular con cubitos de 1 x 1 x 1. El largo, ancho y alto de la caja son números primos y su volumen es diecinueve veces la suma del largo, ancho y alto. Determinar el número de cubitos que se necesitan para llenar la caja.

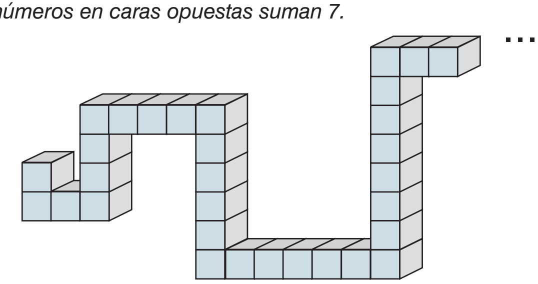
Problema 4

Sea *ABCDEF* un hexágono regular. En las diagonales *CA* y *CE* se han ubicado los puntos *M* y *N* respectivamente, de manera que *M*, *N* y *B* son colineales y *AM* = *CN*. Determinar la medida del ángulo *DNB*.

Problema 5

Alexis tiene 2017 dados y con ellos construye un sólido con forma de serpiente. En la figura se muestra la parte inicial de la construcción. Sabiendo que para unir los dados Alexis ha ido pegando caras con igual número, determinar el máximo valor que se puede obtener al sumar los números en todas las caras en la superficie del sólido.

Nota: *Cada dado tiene sus caras numeradas de 1 a 6 y los números en caras opuestas suman 7.*



PRIMER AÑO

Problema 1

Determinar la cantidad de enteros positivos del 1 al 10^{2017} que cumplen que la suma de sus cifras sea exactamente 2.

Problema 2

Un entero positivo es tal que tanto al sumarle 2000 como al restarle 17 el resultado es un cuadrado perfecto. Determinar dicho número.

Problema 3

Se pinta cada número entero de rojo o azul de acuerdo a las siguientes reglas:

- El número 1 es rojo.
- Si *a* y *b* son dos números rojos, no necesariamente distintos, entonces los números *a-b* y *a+b* tienen distinto color.

Determinar el color del número 2017.

Problema 4

Determinar todos los números reales positivos *x*, *y*, *z* que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{x}+y+z=x+\frac{1}{y}+z=x+y+\frac{1}{z}=3.$$

Problema 5

Sean *ABCD* un rectángulo y *M* un punto sobre el segmento *BC*. La bisectriz del ángulo *DAM* interseca al segmento *CD* en *N*. Si $AM=BM+DN$, demostrar que *ABCD* es un cuadrado.

"HACIA LA LIBERTAD POR LA CULTURA"